

金門地區第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學

組 別：國中組

作品名稱：神啊，請給我一個聖筊

關 鍵 詞： 擲筊、 機率

編 號：Bm-2

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號由金門縣教育處與承辦單位統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

摘要

透過課本中機率學到的知識，老師與我們討論**機率與擲筊**活動的關連，進而去了解日常生活中常常遇到的擲筊與機率的關連性。將本學期所學到的機率單元與生活中的情境擲筊活動做結合，透過老祖先的智慧-擲筊活動，我們希望從這學習到數學機率的奧妙與它迷人的地方。

研究動機

在九年級下學期數學的 2-2 機率單元中，機率又稱為或然率、機會率或概率、可能性，是一個 0 到 1 之間的實數，是對隨機事件發生可能性的測量，我們開始學習認識機率、探討機率，了解到了事件與實驗發生的機率以及樹狀圖；今年過年時，我們看到了台北市市林區葫蘆寺擲筊大賽送 33 隻 IPHONE13、3 台 PS5，台南也舉辦擲筊大賽送 666666 元現金…等，吸引著大批的人潮前往參加，看著擲筊的抽獎活動宣傳單上寫著，頭獎 XXX 萬元、二獎 XX 萬元、三獎摩托車一台…等等，高額的獎金著實吸引著我們，每個人都抱持著如果我是那個幸運兒，那該有多好啊，看著那長長的排隊得參賽隊伍，好想參加哦。

擲筊是中國人特有的文化之一，不少人遇到疑惑、困難，都會到廟裡擲筊，祈求神明指點迷津，據行天宮的官網指出，杯筊的出現，最早是從宋朝程大昌所著的《演繁露·卜教》書中所看到，古代的人使用的貨幣是蚌殼，因此採用蚌殼最為杯筊來卜吉凶，在當時稱為「杯皎」。近幾年因為受到新冠肺炎的影響，為了減少人群聚集、擔心產生群聚效應，造成疫情擴大，過年期間有很多宮廟因此取消了擲筊大賽、點光明燈的活動；雖然不能參加擲筊大賽，我們可以自己動手來研究，因此開始了我們的研究活動。

研究目的

透過課本中機率學到的知識，老師與我們討論**機率與擲筊**活動的關連，進而去了解日常生活中常常遇到的擲筊與機率的關連性。

研究設備、器材

筊杯、筆、記錄本、實驗記錄表

研究過程

首先，我們要先了解一下筊杯，共有兩面，平面是陽；凸面是陰。

擲筊活動的可產生的狀況有哪些，一般情況之下，我們將不平整的筊杯分為平與凸兩種，因此兩個筊杯投擲下去，共可產生四種情況：聖杯(平凸、凸平)兩種、陰杯(凸凸)一種，以及笑杯(平平)一種。

聖杯(平凸、凸平)代表的是神明允許同意你祈求的事物會成功、順利。

陰杯(凸凸)表示神明不同意或建議你祈求的事物不宜行事。

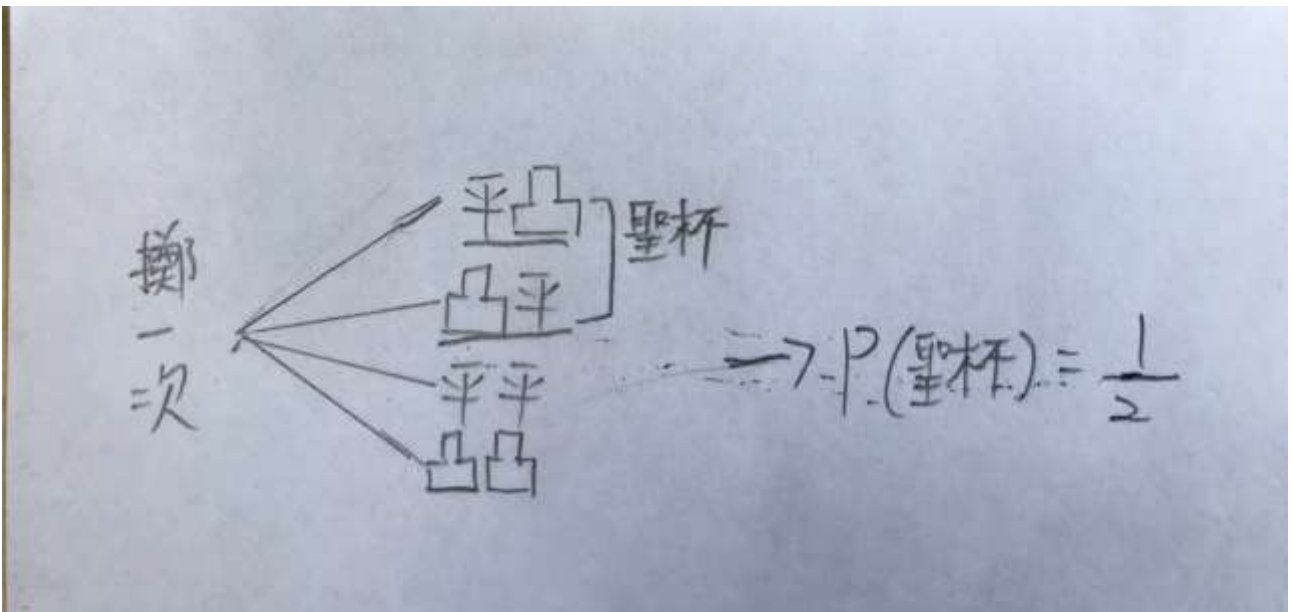
笑杯(平平)表示神明一笑、或者可再次考慮中，建議行事狀況不明，可以重新再擲筊請示神明，或再次說清楚自己的祈求。

懂了這些規則後，我們便開始了這次擲筊活動的探討。

研究題目一：連續三次獲得聖杯的機率是多少？

首先，擲筊活動的可產生的狀況共有四種(平凸、凸平、平平、凸凸)，

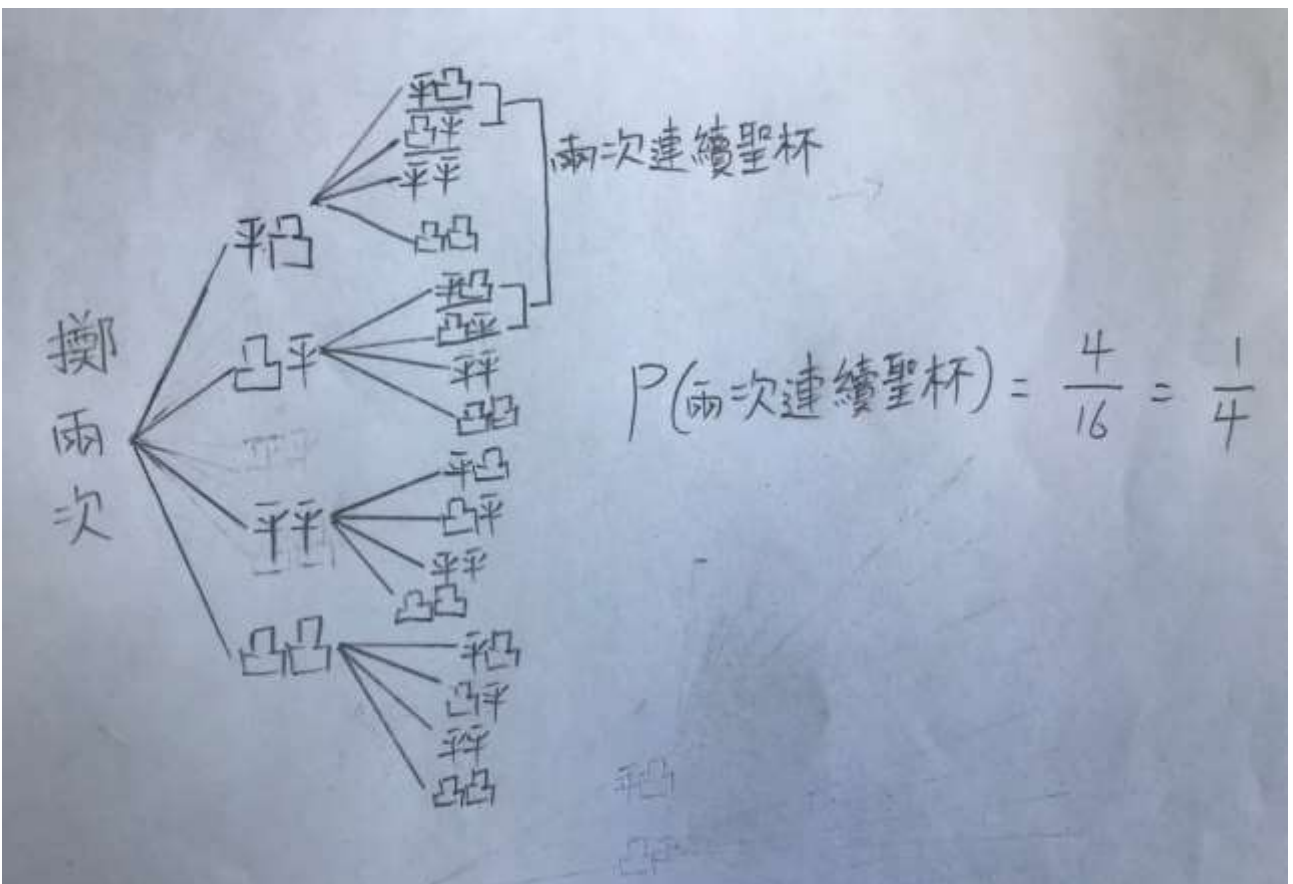
透過樹狀圖我們可以得知：



因此，擲筊一次獲得聖杯的機率是 $P(\text{聖杯}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

那麼連續擲筊二次得聖杯的機率是多少呢？

透過樹狀圖我們可以得知：

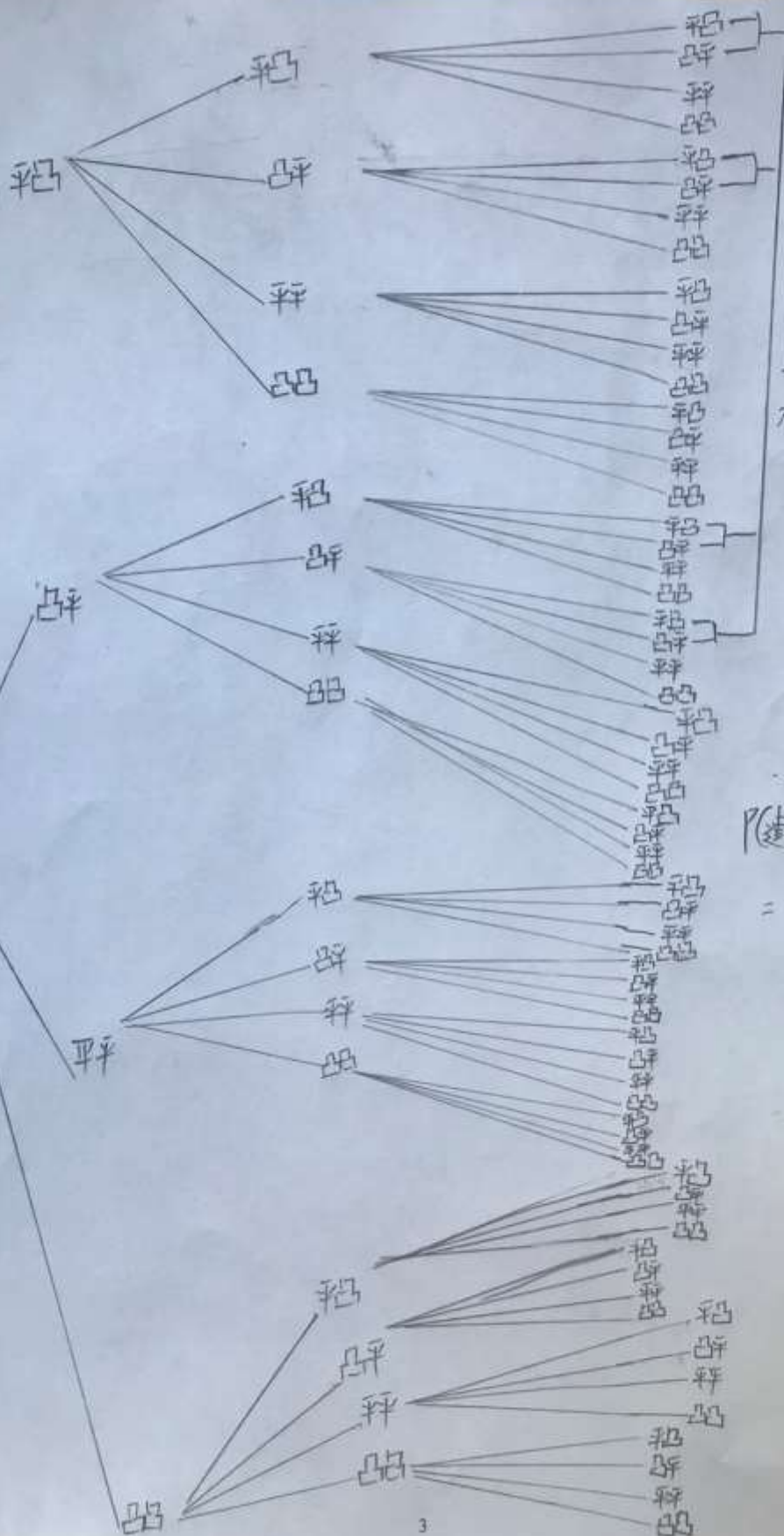


因此，擲筊二次獲得連續聖杯的機率是 $P(\text{兩次連續聖杯}) = \frac{2}{4} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{4}$

那麼，連續三次擲筊得聖杯的機率是多少呢？

透過以下的樹狀圖，我們可以得知：

擲三次



P(連續三次獲得聖杯)

$$= \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

$$\text{因此，} P(\text{連續三次獲得聖杯}) = \frac{2}{4} \times \frac{4}{8} \times \frac{8}{16} = \frac{1}{8}$$

綜合上述我們畫出來的樹狀圖後，可以得知：

$$P(\text{獲得一次聖杯}) = \frac{1}{2},$$

$$P(\text{獲得兩次聖杯}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$P(\text{獲得三次聖杯}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

因此我們歸納出：

$$P(\text{獲得 } N \text{ 次聖杯}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

研究題目二：接下來，我們開始研究近幾年過年期間頗為流行的擲筊活動，因為疫情，所以停辦，所以我們從金門日報中搜尋過去舉辦擲筊活動的舊新聞，找出了一篇：

2019年，金門縣○○鎮○○廟於新春期間舉辦擲筊大賽，參賽者需繳交300元的報名費，頭獎Nissan Livian 1600CC轎車、二獎光陽電動機車、三獎國際牌55吋電視、四獎iPhone8、五獎輝葉按摩椅、六獎dyson 三用機、七獎輝葉美腿按摩機、八獎Switch遊戲主機、九獎小綠吸塵器、十獎5公升金門高粱酒，獎品總金額高達一百萬元，吸引大家踴躍參加。

賽後據統計，本次活動參賽人數約3800人左右，需擲出連續擲出三次聖杯後，取得進入複賽的機會，最後共有四百五十一人進入決賽，其中抱走第一名大獎的選手擲出了九聖杯。

從這篇文章中，我們得到了不少訊息：

(1) 首先，活動的收入為 $3800 \times 300 = 1140000$ 元

活動的支出為 1000000 元

活動收入大於支出，主辦方舉辦活動除了回本之外，還成功吸引人潮目光，來參賽的人員，除了參與本次活動外，另也可能點光明燈祈福、還願…之類活動，成功替廟方打響知名度，活動舉辦成功。

(2) 參加複賽的選手有 451 人，第一名選手擲出九個聖杯，

約等同於 $(\frac{1}{2})^9 = \frac{1}{512}$ ，代表 512 人中，會出現 1 個人擲出連續九個聖杯，本次參與複賽

人員僅 451 人，連續九個聖杯已經超出預期。

研究題目三：筊兩面不同，那會影響擲出聖杯的機率嗎？

我們請班上 24 個同學一起來做實驗，每個人均擲筊五十次，發現：

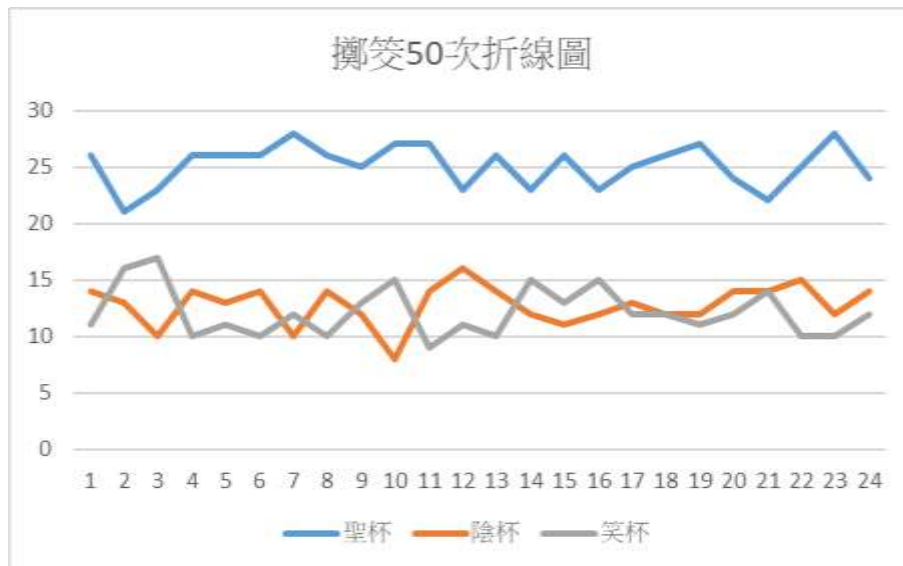
編號	1	2	3	4	5	6	7	8
聖杯	26	21	23	26	26	26	28	26
陰杯	14	13	10	14	13	14	10	14
笑杯	11	16	17	10	11	10	12	10
合計	50	50	50	50	50	50	50	50
聖杯機率	0.52	0.42	0.46	0.52	0.52	0.52	0.56	0.52
編號	9	10	11	12	13	14	15	16
聖杯	25	27	27	23	26	23	26	23
陰杯	12	8	14	16	14	12	11	12
笑杯	13	15	9	11	10	15	13	15
合計	50	50	50	50	50	50	50	50
聖杯機率	0.5	0.54	0.54	0.46	0.52	0.46	0.52	0.46
編號	17	18	19	20	21	22	23	24
聖杯	25	26	27	24	22	25	28	24
陰杯	13	12	12	14	14	15	12	14
笑杯	12	12	11	12	14	10	10	12
合計	50	50	50	50	50	50	50	50
聖杯機率	0.5	0.52	0.54	0.48	0.44	0.5	0.56	0.48

接著，我們整理出聖杯的平均數

$$= (0.52+0.42+0.46+0.52+0.52+0.52+0.56+0.52+0.5+0.54+0.54+0.46+0.52+0.46+0.52+0.46+0.5+0.52+0.54+0.48+0.44+0.5+0.56+0.48) / 24$$

$$= 0.5025$$

發現實驗產生聖杯的平均數約是 0.5025，與樹狀圖討論中，所產生之聖杯機率大致相同，再經由 EXCEL 做出數據的折線圖，呈現的圖表如下：



由折線圖我們可以得知:

24 位同學擲出聖杯的次數大致是落在 21-28 次的這個區間，陰杯與笑杯的次數大致是落在 8-16 這個區間，與我們樹狀圖做出的估計 $P(\text{聖杯}) = \frac{1}{2}$ 、 $P(\text{陰杯})=P(\text{笑杯})= \frac{1}{4}$ 的機率值大致相同。

研究題目四：擲出聖筊的機率，究竟是多少？

老師請我們思考一下，筊杯分為平面與凸面，因此 $P(\text{平面}) + P(\text{凸面}) = 1$ ，一次擲出兩個筊杯，因此我們開始了以下的假設：

筊杯分平與凸面

設 $P(\text{平面}) = x$ $P(\text{凸面}) = 1 - x$

則 $P(\text{聖杯}) = 2x(1-x)$

$= 2x - 2x^2$

$= -2(x^2 - x)$

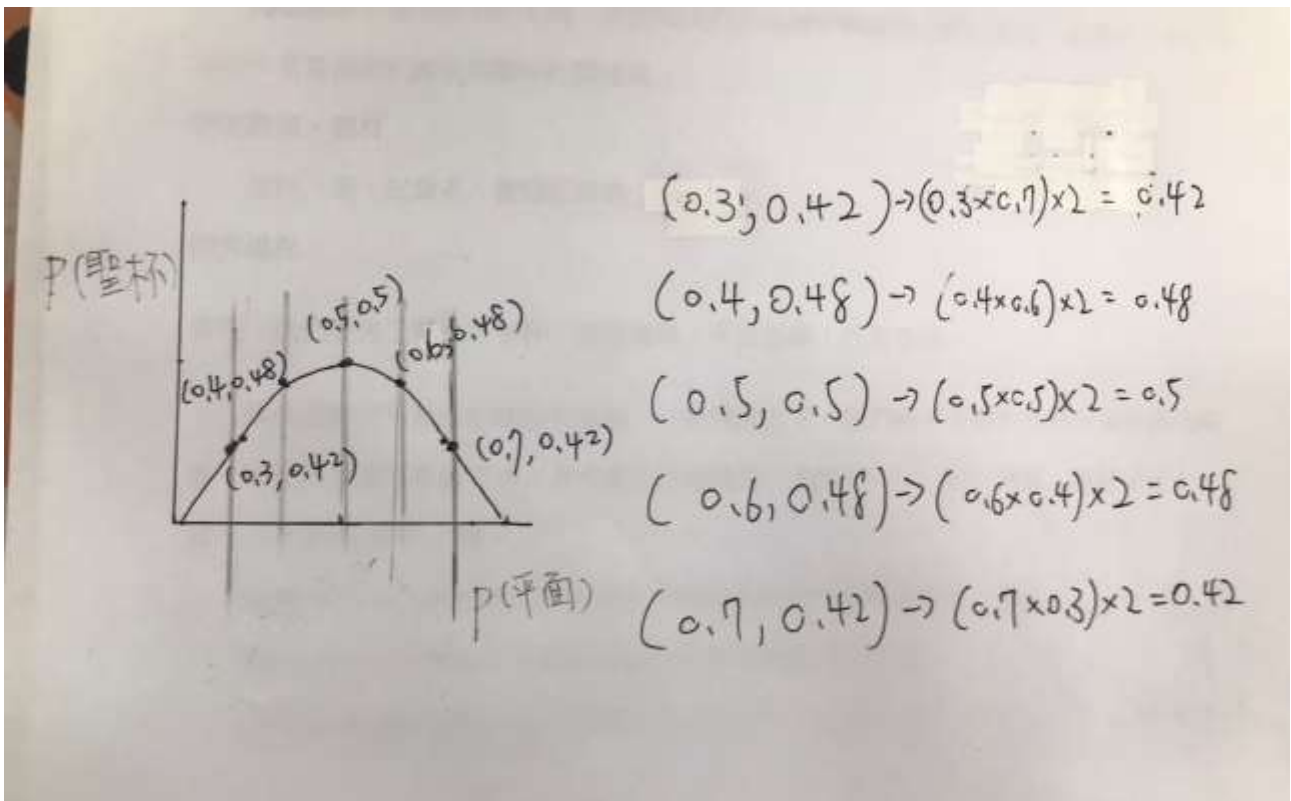
$= -2 \left[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= -2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ (此為二次函數) 開口向↓

頂點座標 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

當 $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 有最大值 $= \frac{1}{2}$

$P(\text{平面}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\text{聖杯})$ 最大值 $= \frac{1}{2}$



我們發現，原來擲出聖筊，與上一單元的二次函數是有相關的，可以找出一個開口向下，頂點是 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，因此，當 $X = \frac{1}{2}$ 時，會有最大值 $\frac{1}{2}$ ，也就是說當 $P(\text{平面}) = \frac{1}{2}$ ， $P(\text{聖筊})$ 的最大值有 $\frac{1}{2}$ 。

結果與結論

經由上述的問題研究後，我們得知：

研究題目一：連續三次獲得聖杯的機率是多少？

$$P(\text{獲得一次聖杯}) = \frac{1}{2},$$

$$P(\text{獲得兩次聖杯}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$P(\text{獲得三次聖杯}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

因此我們歸納出，

$$P(\text{獲得 } N \text{ 次聖杯}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

研究題目二：舉辦擲筊活動

過年的擲筊活動，活動收入大於支出，主辦方舉辦活動除了回本之外，還成功吸引人潮目光，來參賽的人員，除了參與本次活動外，另也可能點光明燈祈福、還願…之類活動，成功替廟方打響知名度，活動舉辦成功。

研究題目三：筊兩面不同，那會影響擲出聖杯的機率嗎？

筊有分為平面與凸面，看似是不公正的，經過我們全班同學每人各擲 50 次後，發現擲出 P(聖杯)的機率與我們樹狀圖所預測的結果差異不大，透過折線圖我們觀察機率的波動

P(聖杯)約是 $\frac{1}{2}$ 。

研究題目四：擲出聖筊的機率，究竟是多少？

經過二次函數的計算後，我們發現擲出聖杯的機率會出現在函數的頂點，也就是

頂點是 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，因此，當 $X = \frac{1}{2}$ 時，會有最大值 $\frac{1}{2}$ ，

也就是說當 $P(\text{平面}) = \frac{1}{2}$ ，P(聖筊)的最大值有 $\frac{1}{2}$ 。

參考資料

國民中學九年級數學課本-康軒版

金門日報

擲出聖筊的機率其實大於二分之一!聖筊的機率到底是多少? | 科學大爆炸 EP.28

<https://www.youtube.com/watch?v=jyCZIIpKWaM>

行天宮官方網站