金門地區第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：限定間隔數的各色珠子排列長度最大量之探討

關 鍵 詞：互質、裴蜀等式、線性組合

編　號：

摘要

本研究旨在探討兩種相異間隔數下的相異色長度，在過程中我們首先觀察間隔數雖為 m、n，但實則以(m+1)、(n+1)為循環，在裴蜀等式的幫助之下，我們完成了以軟體 scratch 發現最大顆數為 m+n 的驗證，且由裴蜀等式找到各種顆次的線性組合美妙呈現，最後更在兩種間隔、多色排列研究的過程中，驗證了在(m+1)與(n+1)互質且指定顏色種類為 y 原則中，長度上限 x = m + n – y + 2，亦能解決原題。。

壹、研究動機

我們幾個人總是喜歡深入探討數學題目的不同解法與延伸研究，有一次我們在 2016 年城市盃初賽看到了這樣的一題:

「*將一些紅色珠子與藍色珠子排成一直線，且紅、藍色珠子都各至少有一顆，並使得若任意兩顆珠子之間恰有 6 顆或 9 顆珠子，則這兩顆珠子必須是同顏色的。請問這一排珠子最多能有多少顆？*」

我們覺得很有趣，就繼續研究下去了。

依原意舉例如下:

abbbbbbabb

排完前七顆後，依題意必須間隔六顆要一樣的顏色，第八顆要加 a，以此類推，加了 abb

abbbbbbabba

依題意的第二個限制，必須間隔九顆要一樣顏色，第十一顆要加 a

abbabbbabba

再回到第一個限制，所以第四顆要換成 a

依此類推找到可以讓全部珠子變為同色的前一步，就是最多顆數。

貳、研究目的

一、解出原本的題目，並從中找出規律。

二、探討維持相異兩色，但各種相異間隔的最多顆數，並列出一般式。

三、找出不同間隔的情況下，容納最多顏色珠子的條件與數量，並列出一般式。

參、研究設備及器材

筆、紙、電腦、平板、軟體 Scratch 與 Padlet

肆、研究方法與過程

一　原題解題思路:

(一) 題目給的限制：

1. 條件一：紅、藍色的珠子至少都要各有 1 顆。
2. 條件二：若兩顆之間有 6 顆珠子，前後必須為一樣顏色的珠子。
3. 條件三：若兩顆之間有 9 顆珠子，前後必須為一樣顏色的珠子。

(二) 我們先以 a、b 作為代號表示紅色珠子和藍色珠子，並逐漸增加珠子的長度。從七顆開始，以黑色代表該輪改變/新增的珠子，並將第一顆設為紅色，其餘預設為藍色，步驟如下：

1. abbbbbb 總數 7 顆，符合條件一，少於七顆沒有意義，就跳過前面。
2. abbbbbba 總數 8 顆，檢查條件二，第八顆加一顆紅色。
3. abbbbbbab 總數 9 顆，檢查條件二，第九顆加一顆藍色。
4. abbbbbbabb 總數 10 顆，檢查條件二，第十顆加一顆藍色。
5. abbabbbabba 總數 11 顆，我們發現：
   (1) 先檢查條件二，第十一顆是藍色，連帶把第一顆(因為條件三)、第八顆(因為條件二)變成藍色，全部都變成藍色(由下知珠子可更多，不可行)；
   (2) 為了再增加可能的珠子顆數我們轉換方式，先檢查條件三，第十一顆加紅色，連帶讓第四顆也變成紅色，順利增加了珠子的數量。
6. abbabbbabbab 總數 12 顆，同時檢查條件二、三，第十二顆是藍色。
7. abbabbbabbabb 總數 13 顆，同時檢查條件二、三，第十三顆也是藍色。
8. abbabbaabbabba 總數 14 顆，與第 5.步驟同，當

(1) 先檢查條件二，第十四顆是藍色，連帶第四顆(因為條件三) 、第十一顆(再因為條件二)變成藍色，緊接著第一、八顆也會跟著變成藍色，又再度全部變成藍色(珠子可更多，不可行)；

(2) 於是我們再轉換成先檢查條件三，讓第十四顆是紅色，連帶第七顆變成紅色(因為條件二)，再度增加珠子數量。

9. 總數 15 顆，因為兩種條件產生不同結果，於是分兩次檢查：

(1) aabaabaaabaabaa 先檢查條件二，所以第十五顆是紅色，連帶把第五顆變成紅色(條件三)，連帶使第十二顆變成紅色(因為條件二)，連帶第二顆變成紅色(因為條件三)，再把第九顆變成紅色(因為條件二)。

(2) bbbbbbbbbbbbbbb 先檢查條件三，第十五顆是藍色，連帶把第八顆、第一顆變成藍色(條件二)，再依序把第十一顆(條件三)、第四顆(條件二)、第十四顆、第七顆變藍色，此時全部同色，不可行。

10. 將 9.(1)一樣分兩種情形探討，可以發現無法再更多顆了。

(1) aaaaaaaaaaaaaaaa 先檢查條件二，所以第十六顆是紅色，前面珠子完全不需變色，接著檢查條件三，第六顆變成紅色，連帶使第十三顆變成紅色(因為條件二)，連帶第三顆變成紅色(因為條件三)，再把第十顆變成紅色(因為條件二)。

(2) bbbbbbbbbbbbbbbb 先檢查條件三，所以第十六顆是藍色，接著檢查條件二，第九顆、第二顆變藍色；再檢查條件三，第十二顆變藍色；接著由條件二，第五顆變成藍色，反覆檢查條件二、三得到依序第十五、八、一、十一、四、十四、七顆全部都變成藍色了。

11. 在第十六顆時，會全部歸於同色，於是，我們得到了原題目的答案：

16-1=15；最多 15 顆。

(三) 解題的思維整理：我們在整理這些解題過程中，發現反覆檢查的路徑是由數字 7 和 10 所決定，所以作了表 1，表格中的數字代表珠子的顆次，黑色是往後增加的顆次，紅色是往前改變顏色的顆次，最後的次則是使用的次數，表 1 引發我們後續研究的想法。

表 1 紅色珠的產生(顆次)順序表

變紅順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
條件二(±7)	(1)	8		4		7	15		12		9	16		13		10	10
條件三 (±10)	(1)		11		14			5		2			6		3		7

(四) 解題過程產生的收穫與想法

1. 按照兩個間隔數分別+1 的數值去增減是產生珠子最大量的關鍵，所以當要探討改變間隔數時，必須注意以下定理：

   (定理 1.1) 定義兩間隔數為 m、n 時，同色顆次必以(m+1)、(n+1)為循環。

2. 利用條件二、三產生紅色珠子的次數，竟恰巧為(n+1)、(m+1)的值(初始的第一顆均屬於兩條件)，於是有大膽猜想：當間隔數 m、n 能排出兩相異色最大量時，其紅色珠子的產生次數分別為(n+1)、(m+1)(此猜測在定理 2.2 中證實了)。

二 我們定義兩個間隔數為 m、n，想要用同樣的方法取得了 m、n 在 1 到 10 (m < n)的結果，加上想探討若開頭不是 abbbbbb，那麼也會有一樣的最大量嗎？但我們發現一個一個算實在是太沒有效率了，於是使用 scratch 程式輔助計算並列成表格，果然有了重大發現，開始我們的驗證之路。

(一) Scratch 輔助

1. 我們將獲得的數據整理如表 2

   表 2

   間隔 m、n 在 1 到 10，且必存在兩相異色時的最大量

		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1		3	∞	5	∞	7	∞	9	∞	11
3	2			5	6	∞	8	9	∞	11	12
4	3				7	∞	9	∞	11	∞	13
5	4					9	10	11	12	∞	14
6	5						11	∞	∞	∞	15
7	6							13	14	15	16
8	7								15	∞	17
9	8									17	18
10	9										19

2. 表格說明與發現：

(1) 我們注意到，就原本規則上的「間隔數」，其實可以視為「這串珠子每(間隔數+1)循環一次」、即「每(m+1)或(n+1)循環一次」。

(2) 為了我們後續的運算。我們又定義 m’ = m+1，n’ = n+1；將表 1 格子白、黃區域內容向左及向上對應到的綠色格子就是 m 和 n，對應到的藍色格子則是 m’和 n’。

(3) 格子內的數即為在對應的 m、n 下，最長能排的長度，其中有某些數字組合沒有長度上限。

(4) 由表 2 可以觀察到間隔 m 與 n 排列之最大的珠子量會是 m+n，而沒有顆數上限 m、n 組合，其 n’與 m’不互質。

(二) 對於規律的驗證(以下均定義 m’ = m+1，n’ = n+1)

1. 我們由表 2 及觀察表 1 做以下猜想及驗證，並又有另一項有趣的發現。

(1) 猜想 2.1：若 m’與 n’互質，則這串珠子的顆數上限會是 m + n。

驗證：

首先，由表 1 我們發想了圖 1：

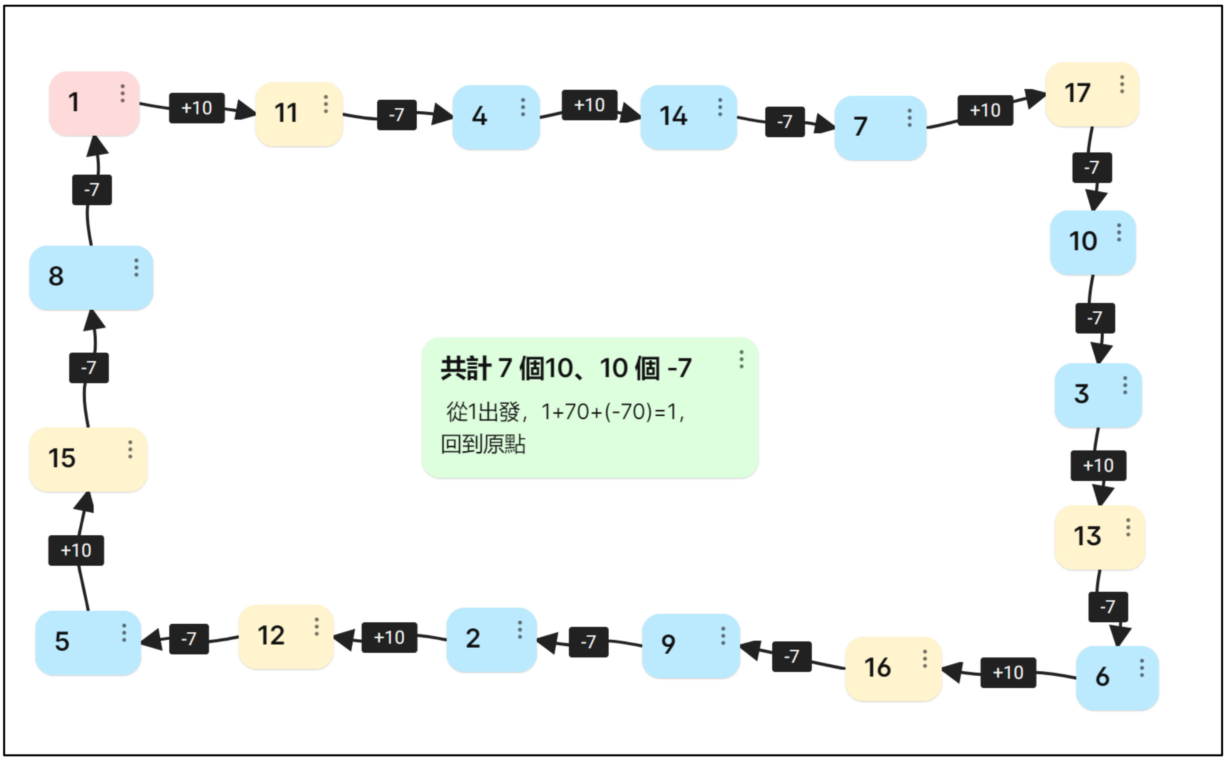


圖 1-紅色珠子顆次發展圖

以此為例，延伸可發現，當間隔數為 m、n 時，若要循環一圈達成某個封閉的顏色，亦即求

1 + wm'+ vn' =1，其中 w 代表增減 m'的次數，v 代表增減 n'的次數，

化簡後得 wm'+vn' = 0

∵ (m', n') = 1

∴ w = n'、v = - m' 或 w = -n' 、v = m'，

無論是哪一組解，都是產生(m' + n') 次增減，顆數也是共(m' + n')顆。

想要將此環截成相異兩色，則必定從最後兩個顆次下手，而且因為間隔數至少為 1，所以末兩顆次必定不連續，一定能將環分成兩部分，

也就是拿掉第(m'+n')顆、第(m'+n'-1)顆，那麼剩下的顆數就是

m' + n' -2 = m + n (顆)，於是我們有了

<u>(定理 2.1) 若(m+1)與(n+1)互質，則這串珠子的顆數上限會是 m + n</u>

(2) <u>(定理 2.2)由裴蜀等式知，若(m+1)與(n+1)互質，則必定存在整數 p、q，使得(m+1)p +(n+1)q=1，因此所有的顆次均能由(m+1)與(n+1)線性組合而成。</u>舉例，將表 1 重新整理觀察，先找出 7p+10q=1 的一組解後，就能依序找到 1 到 m + n 的所有線性組合，可以發現此時的 p、q 變化如下：

表 3

7p+10q=1 到 7p+10q=15 的線性組合

7p+10q=1	依顆次 (表 1)	p 值	q 值	按圖 1 的 順序	顏色
先找出	1	3	-2	1	紅
m_1	8	4	-2	17	紅
n_1	11	3	-1	2	紅
m_2	4	2	-1	3	紅
n_2	14	2	0	4	紅
m_3	7	1	0	5	紅
m_4	15	5	-2	16	紅
n_3	5	5	-3	15	紅
m_5	12	6	-3	14	紅
n_4	2	6	-4	13	紅
m_6	9	7	-4	12	紅
m_7	16	8	-4	11	X
n_5	6	8	-5	10	藍
n_6	13	9	-5	9	藍
m_8	3	9	-6	8	藍
n_7	10	10	-6	7	藍
	17	11	-6	6	X

(3) 猜想 2.3：若 n’ 與 m’ 沒有互質，則這串珠子沒有長度上限，且按 m’與 n’的最大公因數做循環。

驗證：

假設(m’,n’) = c ≥2，若以 c 的長度排珠子，並將此珠子循環擺放，

因為 c 循環，且 c|m’且 c|n’，

所以 m’與 n’都會循環，

又因為 (m’,n’) ≥2，所以紅藍兩色都至少會有一個，

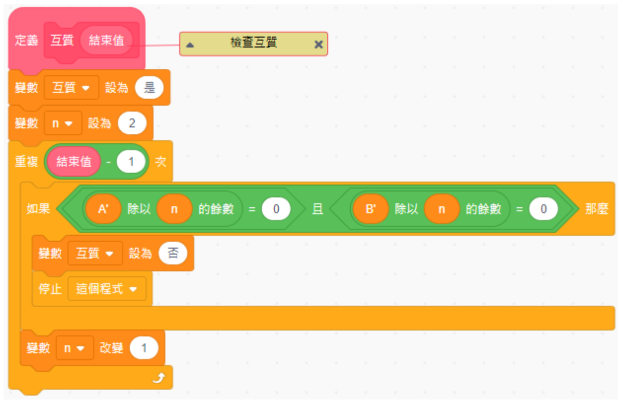
同理，對於 c 的所有大於 1 的因數均適用，

故這些珠子將可以無限擺放。得

<u>(定理 2.3) 若(n+1)與(m+1)沒有互質，則這串珠子沒有長度上限，且有循環長度為(n+1)與(m+1)的 1 以外之公因數。</u>

(三) 對 scratch 指令的更優化

1. 有了以上推論，我們將 scratch 優化如下



2. 程式運作邏輯：若 m+1 與 n+1 不互質，則長度輸出無限，否則則利用清單功能建立一組數字表示珠子，並利用函數模擬改變珠子顏色的過程。利用此程式，我們只要輸入 m、n，就可以直接得到答案。

三 珠子能排出最大量時，不同間隔的情況下，容納最多顏色珠子的條件與數量

(一) 我們以起始每增加一顆均為不同色的方法，探討同色間隔為 m、n ($m < n$) 的情況下，顏色及珠子數量的關係，依此規則取得珠子數量最大量，因為考量 m 與 n 之間倍數的關係，我們分別取 $n < 2m$、$n=2m$、$n>2m$ 來思考，每個英文字母都代表不同的顏色，藍色是依據的珠子，紅色是新增或改變，舉例如表 4：

表 4-不同間隔的情況下，容納最多顏色珠子的條件與數量

數量	m=6 n=9	色數	m=5 n=10	色數	m=4 n=11	色數
1	a	1	a	1	a	1
2	ab	2	ab	2	ab	2
3	abc	3	abc	3	abc	3
4	abcd	4	abcd	4	abcd	4
5	abcde	5	abcde	5	abcde	5
6	abcdef	6	abcdef	6	abcdea	5
7	abcdefg	7	abcdefa	6	abcdeab	5
8	abcdefga	7	abcdefab	6	abcdeabc	5
9	abcdefgab	7	abcdefabc	6	abcdeabcd	5
10	abcdefgabc	7	abcdefabcd	6	abcdeabcde	5
11	abcaefgabca	6	abcdefabcde	6	abcdeabcdea	5
12	abcabfgabcab	5	abcdeaabcdea	5	abcdeabcdeab	5
13	abcabcgabcabc	4	aacdeaaacdeaa	4	abadeabadeaba	4
14	abcabcaabcabca	3	aaadeaaaadeaaa	3	ababeababeabab	3
15	aacaacaaacaacaa	2	aaaaeaaaaaeaaaa	2	ababaababaababa	2
16	aaaaaaaaaaaaaaaa	1	aaaaaaaaaaaaaaaa	1	aaaaaaaaaaaaaaaa	1

(二) 依據增減珠子的狀態，在間隔為 m、n($m < n$)的情況下，假設珠子數量為 x，顏色種類為 y，會有以下增、減色方法：

1. 若 $x \le m+1$，則 $y = x$；
2. 若 $m+1 < x \le n+1$，則 $y = m+1$；
3. 若 $n+1 < x$，則 $y = (m+1) - [\, x - (n+1)]$ (y 最小為 1)。

(三) 結果歸納：

1. 珠子從顆數 1 直到長度 m+1 為止，顆數每+1 其能容納的顏色種類就+1，自 m+2 至 n+1，顏色種類均為 m+1，自顆數 n+2 以後，顆數每+1 其所能容納的顏色種類就-1。

2. 由上可歸納兩個探索結果：

(1) <u>(定理 3.1)在指定間隔 m、n(m < n)的情況下，能容納最多顏色為 m+1、此時能容納最多珠子顆數為 n+1；</u>

在指定顏色種類為 y 的原則下，長度上限 x 由(二)3.整理：

$\because\ y = (m+1) - [\, x - (n+1)] = m + n - x + 2$

$\therefore\ x = m + n - y + 2$，例如：

$3 \le m < n$ 前提下，若這串珠子要有 3 種顏色，則長度 x 上限是 m+n-1，在 $4 \le m < n$ 前提下，若這串珠子要有 4 種顏色，則其長度上限就是 m+n-2，5 顆就是 m+n-3，……，依此類推。得

<u>(定理 3.2) 在指定顏色種類為 y 的原則下，當間隔為 m、n，</u>

<u>長度上限 $x = m + n - y + 2$</u>

(2) 由定理 3.2，我們有了巧妙的發現，原來長度上限與間隔數和、顏色種類是這麼簡單的關係。

伍、研究結論

一　同色間隔必為 6 顆或 9 顆，且存在兩種顏色的珠子最大顆數為 15 顆；且得

(定理 1.1) 定義兩間隔數為 m、n 時，同色顆次必以(m+1)、(n+1)為循環。

二　(定理 2.1) 若(m+1)與(n+1)互質，則這串珠子的顆數上限會是 m + n；並有

(定理 2.2)由裴蜀等式知，(m+1)與(n+1)互質，則必定存在整數 p、q，

使得(m+1)p +(n+1)q=1，因此所有顆次均能由(m+1)與(n+1)線性組合而成；及

(定理 2.3) 若(n+1)與(m+1)沒有互質，則這串珠子沒有長度上限，

且有循環長度為(n+1) 與(m+1)的 1 以外之公因數。

三　(定理 3.1)在指定間隔 m、n(m < n)的情況下，能容納最多顏色為 m+1、

此時能容納最多珠子顆數為 n+1；且可整理出

(定理 3.2) 在指定顏色種類為 y 的原則下，當間隔為 m、n，

長度上限 $x = m + n - y + 2$

陸、討論

一　雖然定理 3.2 的推論已經完成，但我們還是稍稍做了驗證，我們以固定 m+n=15，觀察不同間隔下，指定顏色 2 種，確認長度是否都一樣，所以就有了表 5 的產生，由表 5 我們驗證：

表 5-

在(m+1)、(n+1)互質，固定兩間隔 m+n=15、顏色 y = 2 種時，驗證最大顆數為 x = (m+n)-y+2= 15

m=1 n=14	順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
	條件二(±2)	(1)	3	5	7	9	11	13	15		14	12	10	8	6	4	2	15
	條件三(±15)	(1)								$\boxed{16}$								2
m=2 n=13	順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
	條件二(±3)	(1)	4	7	10	13		12	9	6	3	$\boxed{16}$		5	8	11	14	14
	條件三(±14)	(1)					15						2					3
m=3 n=12	順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
	條件二(±4)	(1)	5	9	13		10	6	2		11	7	3		12	8	4	13
	條件三(±13)	(1)				14				15				$\boxed{16}$				4
m=4 n=11	順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
	條件二(±5)	(1)	6	11		8	3		10	5	$\boxed{16}$		9	14		7	12	12
	條件三(±12)	(1)			13			15				4			2			5
m=5 n=10	順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
	條件二(±6)	(1)	7		6	13		8	14		9	15		10	$\boxed{16}$		11	11
	條件三(±11)	(1)		12			2			3			4			5		6
m=6 n=9	順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
	條件二(±7)	(1)	8		4		7	15		12		9	$\boxed{16}$		13		10	10
	條件三(±10)	(1)		11		14			5		2			6		3		7
m=7 n=8	順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	次
	條件二(±8)	(1)	9		2		3		4		5		6		7		8	9
	條件三(±9)	(1)		10		11		12		13		14		15		$\boxed{16}$		8

(一) 在 m+n=15 的各種組合中，正好(m+1)與(n+1)均互質，在各種組合下，2 種顏色時所得到的最大顆數均是 15 顆。

(二) 在使用條件二、條件三的次數上，均恰巧如定理 2.1 的證明過程，間隔 m、n 時，使用次數分別為(n+1)與(m+1)。

(三) 由表中可以發現新增珠子與往回改變的珠子顏色有一定的規律在，推測應與 m 和 n 的差或倍數相關，於是列出了下列的式子：

在第一次使用條件三前，必定已經使用過 i 次條件二，其中 i 符合

$i(m+1)<(n+1)$，且 $(i+1)(m+1) > (n+1)$

所以往回改變珠子顏色，包含符合條件三的新增顆次，會以(i+1)顆為一周期。

(四) 紅、藍色的分隔點設置，必符合

$1+w(m+1)+v(n+1) = m + n +1$，

$wm + w + vn + v = m + n$

$(w -1)(m + 1) +(v - 1)(n + 1) = -2$

因為有最大長度時 (m +1)、(n +1)必互質，所以(w -1)、(v – 1)必定有解。

二　在一開始為了省去變數太多的困擾，我們借用了程式的幫助，初期的程式就是不斷的試誤、找出我們要的答案、整理成表格，然後幸運的我們看到了有趣的規律，因此在探討出原理後，我們回過頭去把程式優化，這件事告訴我們，一個程式要盡善盡美，需要強化數學邏輯與推演。

柒、結論

這次的研究過程中，從一開始解決題目、借助程式幫忙，不斷的嘗試不同方法，最後尋得有幫助的證明方法，現在回顧起來都顯得辛苦但值得，但中間遇到無法有妥善的證明方法時真的太痛苦了。從最後的結果裡，我們對未來也有一些期許，覺得可以繼續去探索，包含再繼續改變題目給的限制，多加一個或數個間隔限制 (例如 m=6、 n=9、 p=12、……)，跳脫只有兩個未知數的線性組合試試看；又或者把珠子的排列換成一個平面圖形(二維)，甚至到立體圖形(三維) 等等，研究有點痛苦，但成果是美味的。

捌、參考資料及其他

一　洪有情(2022)。國中數學課本第二冊。康軒文教事業股份有限公司。

二　單墫(2002)。趣味數論。九章出版社。

三　2016 青少年數學國際城市邀請賽

https://sites.google.com/mail.nknu.edu.tw/cma/%E9%A6%96%E9%A0%81