

金門地區第 55 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：眼算平方

關 鍵 詞：速算法、分配率

編 號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號由本縣科學展覽會承辦單位統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

眼算平方

發現任何個位數為 5 的平方定理

摘要：

會想要開始研究這個問題，是因為考卷中有一個有趣的題目。在這個研究中，一開始我們先從最簡單的數開始平方，再來慢慢延伸，思考其它平方數的形成。最後，我們找出了各位數為 5 的平方數算法，還可以把這種速算法應用到更多的情況，發現了數學中隱藏著許多有趣的東西。利用這次的實驗發現，我們在必要的時候很快就能判斷出兩數的平方值為多少，也因此縮短了做題的時間，使解題的速度更快、更有效率，進一步活化了我們的數學思考方式。

壹、研究動機：

在我們上國一上學期指數律的單元的時候，有許多的數需要我們做平方算出它的值。題目如下：

請計算下列各式的值：

1. (1) $12^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $13^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $15^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解法不難，我們的解法如下：

(1) $12^2 = 12 * 12 = 144$

(2) $13^2 = 13 * 13 = 169$

(3) $15^2 = 15 * 15 = 225$

但是我們希望可以更快速的找到二位數平方的和，所以我們先由較小的數字開始慢慢推廣到更大數的平方，希望可以找出一個固定的式子，且能夠運用到更多的情況，用簡單、快速的方法輕鬆算出平方的值，因此便開始了接下來一連串的研究。

貳、研究問題：

- 一、如何能更快速計算任意兩位數平方的值？
- 二、推廣到更多位數時，又可以如何求其值呢？
- 三、是否可以找到一般化的式子呢？

參、研究設備及器材：

紙、筆及數學思考

肆、研究過程：

【1】 我們把兩位數 11~99 用個位數的 1~9 來分類

(一)

$$11*11=121$$

$$21*21=441$$

$$31*31=961$$

$$41*41=1681$$

$$51*51=2601$$

$$61*61=3721$$

$$71*71=5041$$

$$81*81=6561$$

$$91*91=8281$$

(二)

$$12*12=144$$

$$22*22=484$$

$$32*32=1024$$

$$42*42=1764$$

$$52*52=2704$$

$$62*62=3844$$

$$72*72=5184$$

$$82*82=6724$$

$$92*92=8464$$

(三)

$$13*13=169$$

$$23*23=529$$

$$33*33=1089$$

$$43*43=1849$$

$$53*53=2809$$

$$63*63=3969$$

$$73*73=5329$$

$$83*83=6889$$

$$93*93=8649$$

(四)

$14*14=196$
 $24*24=576$
 $34*34=1156$
 $44*44=1936$
 $54*54=2916$
 $64*64=4096$
 $74*74=5476$
 $84*84=7056$
 $94*94=8836$

(五)

$15*15=225$
 $25*25=625$
 $35*35=1225$
 $45*45=2025$
 $55*55=3025$
 $65*65=4225$
 $75*75=5625$
 $85*85=7225$
 $95*95=9025$

(六)

$16*16=256$
 $26*26=676$
 $36*36=1296$
 $46*46=2116$
 $56*56=3136$
 $66*66=4356$
 $76*76=5776$
 $86*86=7396$
 $96*96=9216$

(七)

$17*17=289$
 $27*27=729$
 $37*37=1369$
 $47*47=2209$
 $57*57=3249$
 $67*67=4489$
 $77*77=5929$
 $87*87=7569$
 $97*97=9409$

(八)

$18*18=324$
 $28*28=784$
 $38*38=1444$
 $48*48=2304$
 $58*58=3364$
 $68*68=4624$
 $78*78=6084$
 $88*88=7744$
 $98*98=9604$

(九)

$19*19=361$
 $29*29=841$
 $39*39=1521$
 $49*49=2401$
 $59*59=3481$
 $69*69=4761$
 $79*79=6241$
 $89*89=7921$
 $99*99=9801$

先分別計算出它們的值

【2】

題目:15*15

Step1

先把乘數的個位數 5

和被乘數的個位數 5 相乘

$$5*5=25$$

Step2

再把乘數的十位數 1

乘上被乘數的十位數加一

$$1+1=2$$

$$1*2=2$$

Step3

將 Step2 求出來的數*100

$$2*100=200$$

Step4

$$200+25=225$$

$$15*15=225$$

所以答案是 225

題目: $85*85$

Step1

先把乘數的個位數 5

和被乘數的個位數 5 相乘

$$5*5=25$$

Step2

再把乘數的十位數 8

乘上被乘數的十位數加一

$$8+1=9$$

$$9*8=72$$

Step3

將 Step2 求出來的數*100

$$72*100=7200$$

Step4

$$7200+25=7225$$

$$85*85=7225$$

所以答案是 7225

題目:105*105

Step1

先把乘數的個位數 5

和被乘數的個位數 5 相乘

$$5*5=25$$

Step2

再把乘數的百位數和十位數 10

乘上被乘數的百位數和十位數加一

$$10+1=11$$

$$11*10=110$$

Step3

將 Step2 求出來的數*100

$$110*100=11000$$

Step4

$$11000+25=11025$$

$$105*105=11025$$

所以答案是 11025

【3】

題目：34*36

第一步：

先把被乘數的十位數(3)乘以乘數的十位數加1(3加1)

然後再把答案乘以100(也就是說後面加00)

$$3*(3+1)=12$$

$$12*100=1200$$

第二步：

被乘數的個位數乘以乘數的個位數

$$4*6=24$$

第三步：

最後把兩數相加

$$1200+24=1224$$

題目：58*52

第一步：

先把被乘數的十位數(5)乘以乘數的十位數加1(5加1)

然後再把答案乘以100（也就是說後面加00）

$$5*(5+1)=30$$

$$30*100=3000$$

第二步：

被乘數的個位數乘以乘數的個位數

$$8*2=16$$

第三步：

最後把兩數相加

$$3000+16=3016$$

題目：97*93

第一步：

先把被乘數的十位數(9)乘以乘數的十位數加1(9加1)

然後再把答案乘以100（也就是說後面加00）

$$9*(9+1)=90$$

$$90*100=9000$$

第二步：

被乘數的個位數乘以乘數的個位數

$$7*3=21$$

第三步：

最後把兩數相加

$$9000+21=9021$$

【4】

題目：17*14

第一步：

先把（17）跟乘數的個位數（4）加起來

$$17+4=21$$

然後再把答案乘以 10（也就是說後面加個 0）

$$21*10=210$$

第二步：

再把被乘數的個位數（7）乘以乘數的個位數（4）

$$7*4=28$$

第三步：

最後把兩數相加

$$210+28=238$$

題目：51*56

第一步：

先把（51）跟乘數的個位數（6）加起來

$$51+6=57$$

然後再把答案乘以 50

$$57*50=2850$$

第二步：

再把被乘數的個位數（1）乘以乘數的個位數（6）

$$1*6=6$$

第三步：

最後把兩數相加

$$2850+6=2856$$

題目：93*98

第一步：

先把（93）跟乘數的個位數（8）加起來

$$93+8=101$$

然後再把答案乘以 90

$$101*90=9090$$

第二步：

再把被乘數的個位數（3）乘以乘數的個位數（8）

$$3*8=24$$

第三步：

最後把兩數相加

$$9090+24=9114$$

伍、討論：

【1】 條件:十位數相同，個位數為五

我們發現個位數字為 5 的規律,例如: $15*15=225$, 個位數 $5*5$ 所以末兩位為 25,

十位數字為 1, 所以 $1*(1+1)=2$, $2*100=200$, 最後得答案 $200+25$ 也就是 225,

我們再試著用這個方式推論 $25*25$, 末兩位 $5*5=25$, 十位數字為 2, 所以

$2*(2+1)=6$ 答案依然符合我們希望的結果為 625。

【2】 條件:十位數相同，個位數相加為十

再來假如我們把上述方法略加修改，還可以把這種速算法應用到更多情況。設我

們要求 27×23 的結果，請注意這裡 $7 + 3 = 10$ 。同樣我們把這兩個數先拆

成兩部分：個位數和十位數。先處理個位數： $7 \times 3 = 21$ 。接著處理十位數 2，

同樣先把 2 加 1 得 3，然後以 3 乘 2 得 6， $6*100=600$ 得答案 $600+21$ 也就是

621，由此得 $27 \times 23 = 621$ 。

【3】 條件: 十位數相同

最後，我們發現了十位數相同，但個位數相加不必為 10，也能快速計算出答案

的速算法。設題目為 $51*56$ ，首先，我們先處理個位數，同樣是直接相乘：

$1*6=6$ 。再來處理十位數，這次必須將被乘數 51 加上乘數的個位數 6 得 57，

接著因為十位數是 50，所以 $57*50=2850$ ，得答案 $2850+6=2856$ ，由此可知

$51*56=2856$ 。

陸、證明：

其實上述速算法就是利用這條恆等式得來的。一個個位數為 5 的數可以寫成

$10a + 5$ 。應用以上恆等式，

$$\begin{aligned}(10a + 5)(10a + 5) &= 100a^2 + 50a + 50a + 25 = 100a^2 + 100a + 25 \\ &= 100a(a + 1) + 25\end{aligned}$$

請注意 這種「推廣的速算法」只適用於相乘兩個數的十位數相等且個位數相加等於 10 的情況。對於這類數，我們可以把它們分別寫為 $10a + b$ 和 $10a +$

$(10 - b)$ 。接著我們試試把這兩個數相乘：

$$\begin{aligned}(10a + b) [10a + (10 - b)] &= 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + 10b - b^2 \\ &= 100a(a + 1) + b(10 - b)\end{aligned}$$

如果我們兩個數的十位數相等且個位數相加不等於 10 的情況。同理對於這類數，我們可以 把它們分別寫為 $10a + b$ 和 $10a + c$ 。

接著我們試試把這兩個數相乘：

$$(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10ac + 10ab + bc = 10a(10a + b+c) + bc$$

柒、研究心得及感想：

我們經過這番的研究之後才發現，數學是如此的有趣。在研究時雖然不免碰到一些小小的挫折，但我們還是完成了這個研究!這個研究也讓我們了解到數學與我們的生活息息相關。

國小時就曾參加過自然的科展比賽，當時我們得了佳作，嚐到了努力過後收穫的甜美果實，也留下了十分深刻的回憶，因此，老師讓我加入這次的數學科展時，我立刻答應了。有別於之前六人分工合作，現在只有三個人可以互相討論，上了國中的課業也逐漸加重，我們能夠聚在一起的時間不多，研究主題「眼算平方」時，也會有一時混亂、腦筋轉不過來的時候，但經過反覆的練習，我們越來越熟練，能夠輕鬆的運用速算法算出數字較大的值。這次的數學科展，多虧了老師的細心指導、協助，與組員的分工合作，我們才可以完成這項研究，不論最後的成績如何，更重要的是我們都在這次的科展學到了許多，也留下了美好的回憶。

捌、參考資料：

康軒版數學、數學考卷、同學意見、老師意見、我們的頭腦

<http://dolcissimavita.pixnet.net/blog/post/48704542-%E7%A5%9E%E5%A5%87%E7%9A%84%E6%95%B8%E5%AD%B8%EF%BD%9E-99-%E4%B9%98%E6%B3%95%E8%A1%A8%E5%88%B0-1919>

<http://vinegareveryday.pixnet.net/blog/post/95724966-%E5%8D%B0%E5%BA%A6%E5%BC%8F%E7%AE%97%E8%A1%931919%E4%B9%98%E6%B3%95%E8%A1%A8>