金門地區第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：國中組

組　　別：數學科

作品名稱：完整知多少？探討方格紙上線段通過的方格數

關 鍵 詞：格子點、最大公因數

編　　號：

完整知多少？
探討方格紙上線段通過的方格數

摘要

本研究在計算線段在方格紙上會通過多少個正方形方格的個數，進而找出規律，並推廣到二線段、內接於一矩形內的三角形、四邊形的各邊會通過多少個正方形方格的個數計算，找出計算的一般式。

壹、研究動機

某日在一片貼滿大小相同的正方形磁磚的牆面上，看到一條電線斜過這面牆壁，破壞了整個牆面的美感，這時候心裡想著，如果要把這條電線隱藏到磁磚下方，那麼最少需要拆掉多少塊磁磚才能辦到？這激起我們研究的興趣。

貳、研究目的

一、計算由 n×m 格的方格紙矩形，一條對角線會通過多少格方格？

二、推廣到內接三角形、內接四邊形通過的方格數有多少？

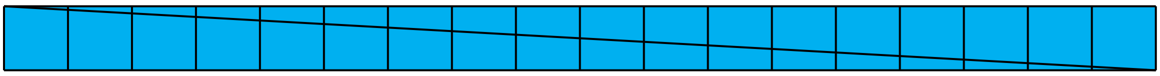
參、研究內容

先定義一函數Φ，在 n×m 格方格的矩形，一條對角線會經過的方格數為Φ(n×m)格。又所有小方格的頂點均稱為格子點。

一、一條對角線

(一)n×1 的矩形，很顯然的每一個方格都會被經過，所以通過的方格數共有 n 格。

n	1	2	3	4	5	…	n
通過的方格數	1	2	3	4	5	…	n

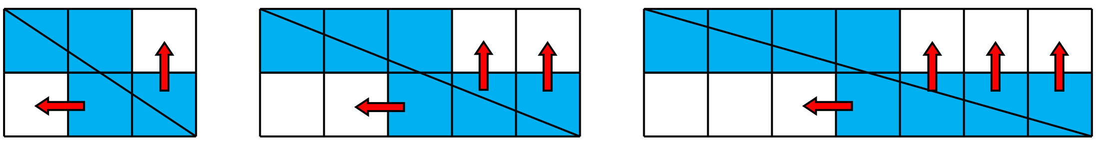


$\Phi(n\times1)=n+1-1=n$

(二)n×2 的矩形

1. 途中未經過格子點，即(n, 2)=1

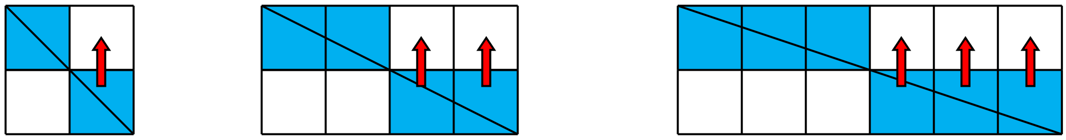
n	3	5	7	9	11	…	n
通過的方格數	4	6	8	10	12	…	n+1



$\Phi(n\times2)=n+2-1=n+1$

2.途中會經過格子點，則(n,2)=2

n	2	4	6	8	10	n
通過的方格數	2	4	6	8	10	n+2-2=n

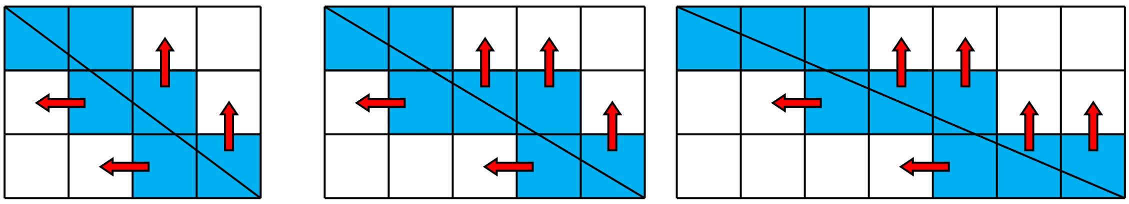


Φ(n×2)=n+2-2=n

(三)n×3 的矩形

1.途中未經過格子點，即(n,3)=1

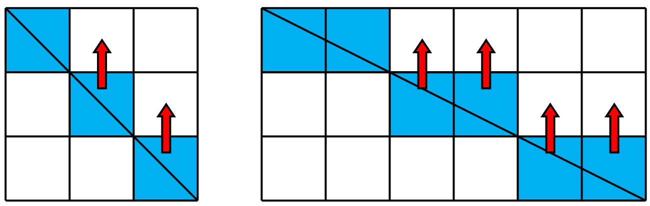
n	4	5	7	8	10	n
通過的方格數	6	7	9	10	12	n+3-1=n+2



Φ(n×3)=n+3-1=n+2

2.途中會經過格子點，則(n,3)=3

n	3	6	9	12	15	n
通過的方格數	3	6	9	12	15	n+3-3=n

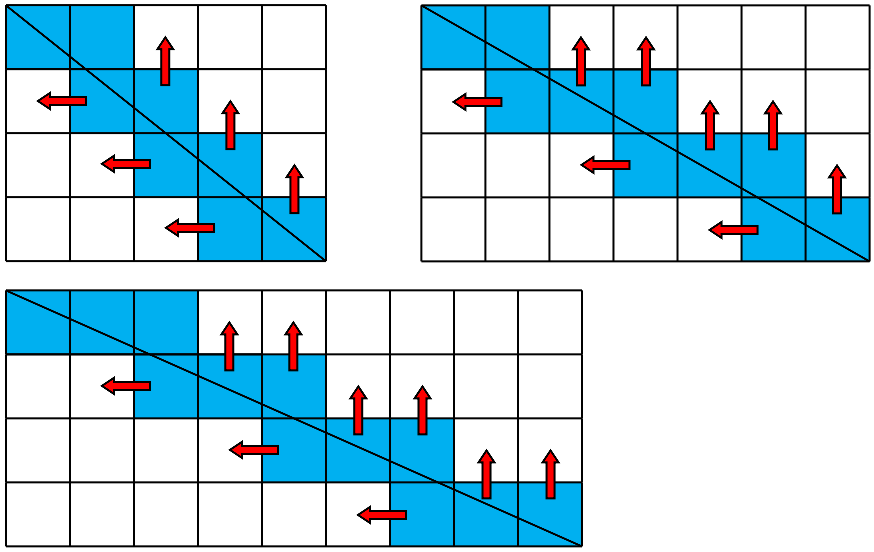


Φ(n×3)=n+3-3=n

(四)n×4 的矩形

1.途中未經過格子點，即(n,4)=1

n	5	7	9	11	13	n
通過的方格數	8	10	12	14	16	n+4-1=n+3

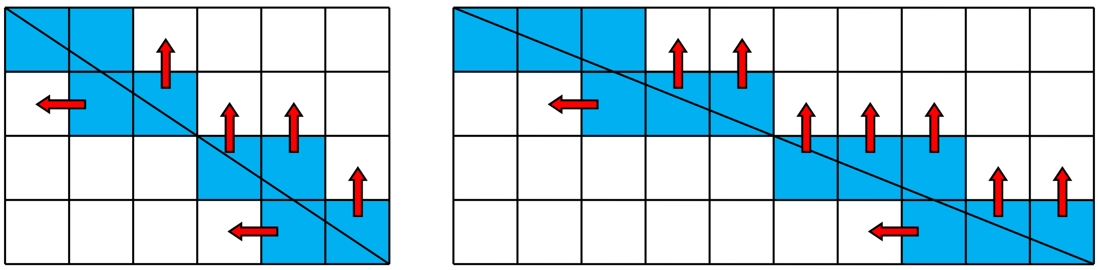


Φ(n×4)=n+4−1=n+3

2.途中會經過格子點

(1)若(n,4)=2

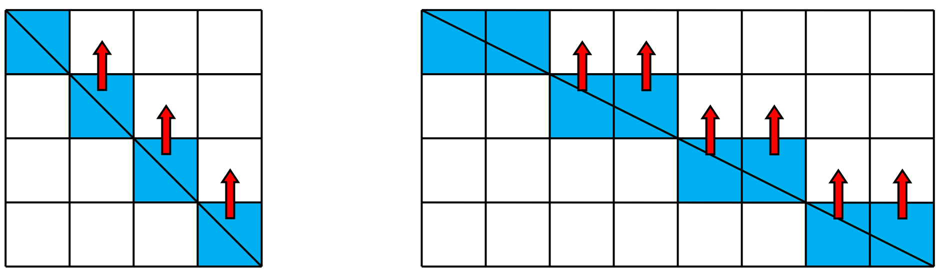
n	6	10	14	18	22	n
通過的方格數	8	12	16	20	24	n+4−2=n+2



Φ(n×4)=n+4−2=n+2

(2)若(n,4)=4

n	4	8	12	16	20	n
通過的方格數	4	8	12	16	20	n+4−4=n

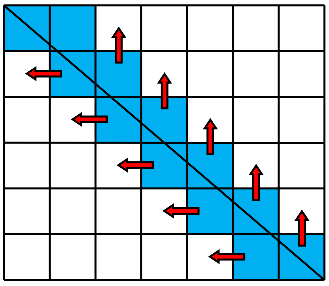
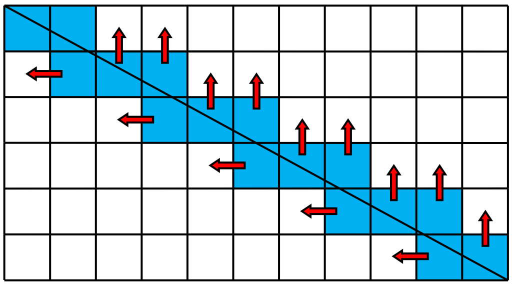


Φ(n×4)=n+4−4=n

(五)n×6 的矩形

1.途中未經過格子點，即(n,6)=1

n	7	11	13	17	19	n
通過的方格數	12	16	18	22	24	n+6-1=n+5

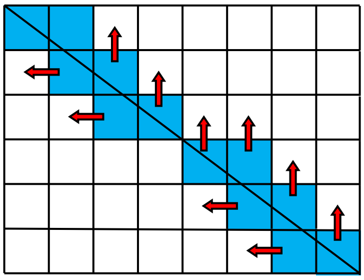
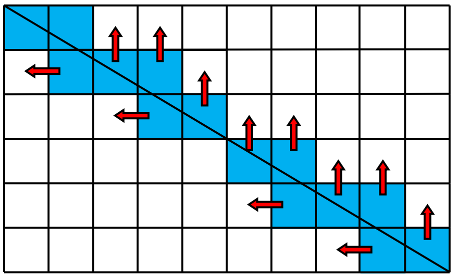



$\Phi(n\times6)=n+6-1=n+5$

2.途中會經過格子點

(1)若(n,6)=2，則途中會經過 1 個格子點

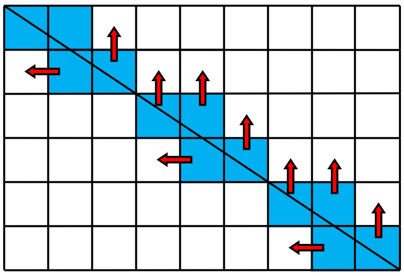
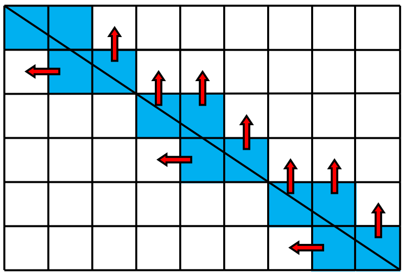
n	8	10	14	16	20	n
通過的方格數	12	14	18	20	24	n+6-2=n+4

$\Phi(n\times6)=n+6-2=n+4$

(2)若(n,6)=3，則途中會經過 2 個格子點

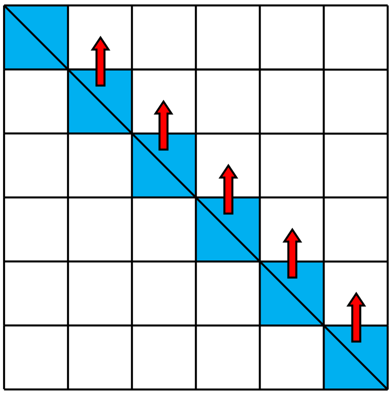
n	9	15	21	27	33	n
通過的方格數	12	18	24	30	36	n+6-3=n+3

$\Phi(n\times6)=n+6-3=n+3$

(3)若(n,6)=6，則途中會經過 5 個格子點

n	6	12	18	24	30	n
通過的方格數	6	12	18	24	30	n+6-6=n

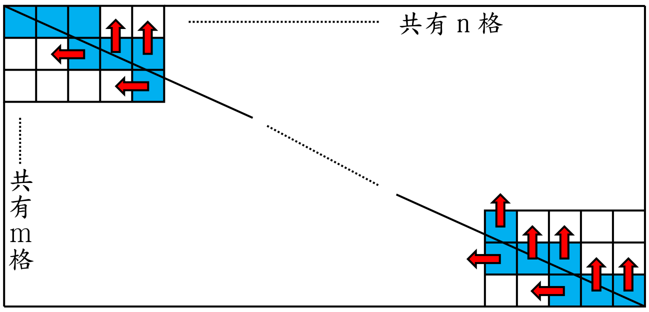


Φ(n×6)=n+6-6=n

(六)n×m 的矩形

1. 途中未經過格子點

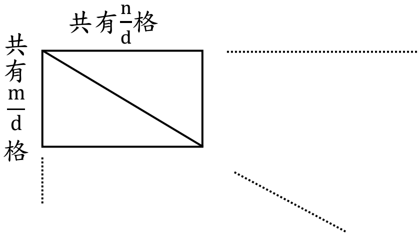
由(一)~(五)可觀察出，(n,m)=1，通過的格子數為 n+m-1 格。



Φ(n×m)=n+m-1

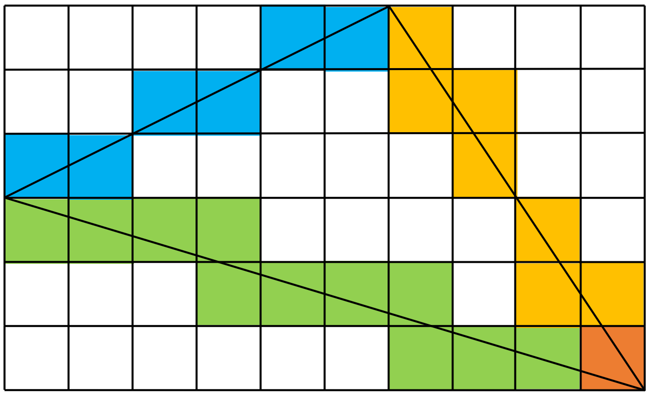
2. 途中會經過格子點

由(一)~(五)可得，若(n,m)=d，則$(\frac{n}{d},\frac{m}{d})$=1，原方格紙會有如 d 個這種小長方形，途中經過的格子點數為 k=d-1 個，所以通過的方格總數為 $(\frac{n}{d}+\frac{m}{d}-1)\times d$=n+m-d 格或可以記為 n+m-1-k 格。



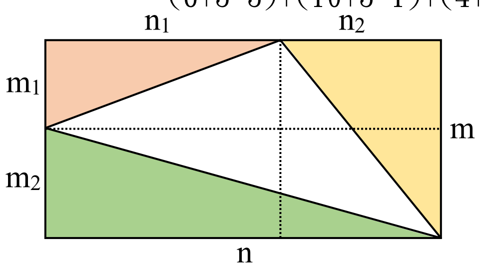
3. 由 1.2. 可知，無論途中是否經過格子點，只要能知道矩形的長 n 與寬 m，並算出 n 和 m 的最大公因數 d，則通過的方格總數為 n+m-d 格或 n+m-1-k 格。

二、內接三角形



通過的方格總數=$\Phi(6\times3)+\Phi(10\times3)+\Phi(4\times6)-1$

$=(6+3-3)+(10+3-1)+(4+6-2)-1=25$



若$(n_1，m_1)=d_1$、$(n，m_2)=d_2$、$(n_2，m)=d_3$

通過的方格總數=$\Phi(n_1\times m_1)+\Phi(n\times m_2)+\Phi(n_2\times m)-1$

$=(n_1+m_1-d_1)+(n+m_2-d_2)+(n_2+m-d_3)-1$

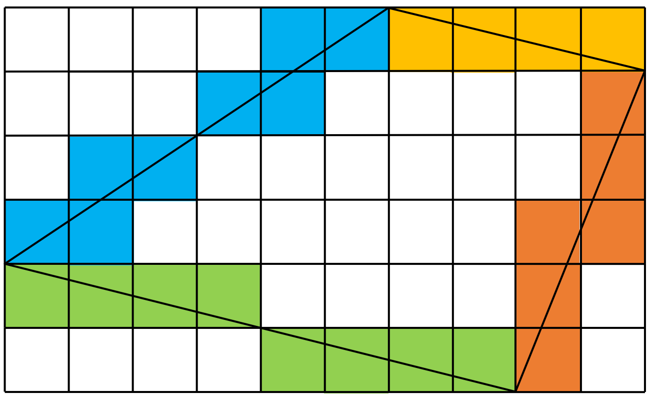
$=2n+2m-(d_1+d_2+d_3)-1$

$=2n+2m-(k_1+1+k_2+1+k_3+1)-1$

$=2n+2m-k-4$　　其中 k 為三邊經過的格子點總數

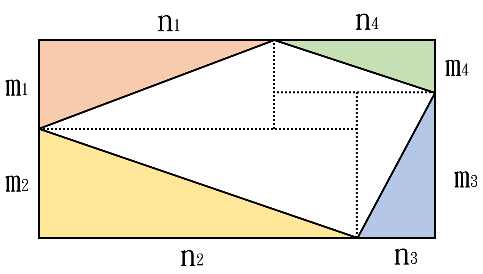
可看成矩形周長分別減去三個塗色的直角三角形兩股長的最大公因數後再減去 1 或看成矩形周長減去三角形各邊經過的格子點總數後再減去 4。

三、內接四邊形：四邊形的四頂點分別在矩形的每邊上



通過的方格總數=$\Phi(6\times4)+\Phi(8\times2)+\Phi(2\times5)+\Phi(4\times1)$

$=(6+4-2)+(8+2-2)+(2+5-1)+(4+1-1)=26$



若$(n_1，m_1)=d_1$、$(n_2，m_2)=d_2$、$(n_3，m_3)=d_3$、$(n_4，m_4)=d_4$

通過的方格總數$=\Phi(n_1\times m_1)+\Phi(n_2\times m_2)+\Phi(n_3\times m_3)+\Phi(n_4\times m_4)$

$=(n_1+m_1-d_1)+(n_2+m_2-d_2)+(n_3+m_3-d_3)+(n_4+m_4-d_4)$

$=2n+2m-(d_1+d_2+d_3+d_4)$

$=2n+2m-(k_1+1+k_2+1+k_3+1+k_4+1)$

$=2n+2m-k-4$　　其中 k 為四邊經過的格子點總數

可看成矩形周長分別減去四個塗色的直角三角形兩股長的最大公因數

或看成矩形周長減去四邊形各邊經過的格子點總數後再減去 4。

肆、研究結果

一、若以函數$\Phi(n\times m)$來表示，在 $n\times m$ 個方格的矩形中，一條對角線會經過的方格數。

(一)若$(n,m)=1$，則$\Phi(n\times m)=n+m-1$

(二)若$(n,m)=d$，則$(\frac{n}{d}，\frac{m}{d})=1$，則$\Phi(n\times m)=d\times\Phi(\frac{n}{d}\times\frac{m}{d})=d\times(\frac{n}{d}+\frac{m}{d}-1)=n+m-d$

(三)若途中經過的格子點數為 k 個，即 $k=d-1$，則以上兩式的$\Phi(n\times m)$均可表示為 $n+m-1-k$。

二、若以最大公因數的概念來看，在 $n\times m$ 個方格的矩形中

內接三角形三邊會經過的方格數為 $2n+2m-d_1-d_2-d_3-1$ 其中 d_1、d_2、d_3 為分別以三角形的一邊為斜邊的直角三角形兩股長的最大公因數。

內接四邊形四邊會經過的方格數為 $2n+2m-d_1-d_2-d_3-d_4$ 其中 d_1、d_2、d_3、d_4 為分別以四邊形的一邊為斜邊的直角三角形兩股長的最大公因數。

三、若以各邊經過的格子點總數的概念來看，在 $n\times m$ 個方格的矩形中

內接三角形、內接四邊形各邊會經過的方格數均可用 $2n+2m-k-4$ 來表示，其中 k 為三角形或四邊形各邊經過的格子點總數

伍、參考資料

一、康軒版 國中七年級數學課本—第一冊 第 2 章 最大公因數、第四冊 第 2 章 函數

二、第 46 屆科展作品(颶風來嚕—對角線與方格圖之關係探討與推廣)