金門地區第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：古老的傳說：世界末日的降臨

關 鍵 詞：河內塔、等比數列（最多 3 個）

編　　號：

摘　　要

河內塔問題為法國數學家所提出的問題，簡單的遊戲規則卻有驚人的發現。當 64 個圓盤移動完之後竟然會產生出天文數字，非一般邏輯可以想像。河內塔問題的研究已經從三柱變成四柱、五柱等，也針對此多了很多限制條件，讓河內塔問題更加多元與豐富。除了三柱移動次數的一般式外，我們也發現許多移動軌跡的特性，以利在移動時更加便利。對於四柱河內塔問題，我們也找到移動次數的解，雖然還無法寫成一般式，但這會是我們繼續努力的目標。

壹、研究動機

傳說在古老的越南河內，有一座神廟。廟宇正中間的平臺有三根細柱，另有 64 個大小不同的圓盤套在其中一根細柱上。移動這 64 個圓盤有一個規定，大圓盤不可放在小圓盤上面，且一次只能拿一個圓盤。如果移動一個圓盤只要一秒鐘的時間，那麼移動完 64 個圓盤，世界就將要毀滅了。

這個傳說引起了我們的好奇心，首先 64 個圓盤不算多，況且只要移動到另一根細柱即可。一秒鐘移動一個，光是一天就可以移動 86400 次，這樣的條件要完成應該不難吧，於是我們開始了研究。

貳、研究目的

一、探討三柱河內塔移動次數的一般式。
二、三柱河內塔問題的相關特性。
三、四柱河內塔移動次數之研究。

參、研究設備與器材

紙、筆、河內塔道具

肆、研究過程或方法

一、探討三柱河內塔移動次數的一般式。

為了研究方便，我們定義a_n為移動 n 個圓盤所使用的次數，故$a_1 = 1$。這三根柱子為 A、B、C 柱，並將每個圓盤編號：編號為①是最小的圓盤，依序往下，編號較大圓盤也較大。

使用這樣的編號利於我們觀察圓盤移動的情形，紀錄移動的過程。我們可以得知$a_2 = 3$。如下圖所示：

A	B	C
②		①

A	B	C
	②	①

A	B	C
	①	
	②	

我們得知$a_3 = 7$。如下圖所示：

A	B	C
②		
③		①

A	B	C
③	②	①

A	B	C
	①	
③	②	

A	B	C
	①	
	②	③

A	B	C
①	②	③

A	B	C
		②
①		③

A	B	C
		①
		②
		③

我們得知$a_4 = 15$。如下圖所示：

A	B	C
②		
③		
④		①

A	B	C
③		
④	②	①

A	B	C
③	①	

A	B	C
	①	

④	②	

④	②	②

A	B	C
①		
④	③	④

A	B	C
①		②
④		③

A	B	C
		①
		②
④		③

A	B	C
		①
		②
	④	③

A	B	C
	①	②
	④	③

A	B	C
	①	
②	④	③

A	B	C
①		
②	④	③

A	B	C
①	③	
②	④	

A	B	C
	③	
②	④	①

A	B	C
	②	
	③	
	④	①

A	B	C
	①	
	②	
	③	

	④	

我們得知$a_5 = 31$。如下圖所示：

A	B	C
②		
③		
④		
⑤		①

A	B	C
③		
④		
⑤	②	①

A	B	C
③		
④	①	
⑤	②	

A	B	C
④	①	
⑤	②	③

A	B	C
①		
④		
⑤	②	③

A	B	C
①		
④		②
⑤		③

A	B	C
		①
④		②
⑤		③

A	B	C
		①
		②
⑤	④	③

A	B	C
	①	②
⑤	④	③

A	B	C
②	①	
⑤	④	③

A	B	C
①		
②		
⑤	④	③

A	B	C
①		
②	③	
⑤	④	

A	B	C
②	③	
⑤	④	①

A	B	C
	②	
	③	
⑤	④	①

A	B	C
	①	
	②	
	③	
⑤	④	

A	B	C
	①	
	②	
	③	
	④	⑤

A	B	C
	②	
	③	
①	④	⑤

A	B	C
	③	②
①	④	⑤

A	B	C
		①
	③	②
	④	⑤

A	B	C
		①
		②
③	④	⑤

A	B	C
	①	②
③	④	⑤

A	B	C
②	①	
③	④	⑤

A	B	C
①		
②		
③	④	⑤

A	B	C
①		
②		④
③		⑤

A	B	C
		①
②		④
③		⑤

A	B	C
		①
		④
③	②	⑤

A	B	C
	①	④
③	②	⑤

A	B	C
		③
	①	④
	②	⑤

A	B	C
		③
		④
①	②	⑤

A	B	C
		②
		③
		④
①		⑤

A	B	C
		①
		②
		③
		④
		⑤

從以上的研究可以看出來$a_1 = 1$、$a_2 = 3$、$a_3 = 7$、$a_4 = 15$、$a_5 = 31$，我們大膽的推測河內塔三柱的移動次數一般式為 $a_n = 2^n - 1$。

我們再更進一步思索，如果想要移動 5 個圓盤，我們應該先將上面 4 個圓盤先做移動，移動到其中一根柱子，再將第 5 個圓盤移動到另一根柱子，再將那 4 個圓盤移到第 5 個圓盤的柱子上，故$a_5 = a_4 + 1 + a_4 = 2a_4 + 1$。

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = 2a_1 + 1\\
&a_3 = 2a_2 + 1\\
&a_4 = 2a_3 + 1\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n = 2a_{n-1} + 1
\end{aligned}
$$

左邊式子相加與右邊式子相加，並且經由化簡得到

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + (a_3 + 1) + \cdots + (a_{n-1} + 1)\\
&= 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1。
\end{aligned}
$$

為了應證我們的發現是對的，我們利用數學歸納法證明這個式子：
我們假設$n = k$，$a_k = 2^k - 1$這個式子是對的，$n = k + 1$代表圓盤要移動 k+1 次，根據發現要移動 k 個圓盤，再移動 k+1 這個圓盤，最後再移動 k 個圓盤疊上去，所以$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2 \times (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$。依數學歸納法，我們可以知道$a_n = 2^n - 1$這個式子是對的。

二、河內塔問題的相關特性。

1. N 的奇偶數決定了圓盤會移動到 B 柱或 C 柱。

當$N=1$時，要移動到 B 柱或 C 柱都可以。當$N=2$時，如果第一個圓盤先移到 C 柱，最後的結果會讓整個圓盤移動到 B 柱。當$N=3$時，如果第一個圓盤先移到 C 柱，最後的結果會讓整個圓盤移動到 C 柱。當 N=4 時，如果第一個圓盤先移到 C 柱，最後的結果會讓整個圓盤移動到 B 柱。當 N=5 時，如果第一個圓盤先移到 C 柱，最後的結果會讓整個圓盤移動到 C 柱。

當 N 等於偶數時，第一個圓盤移動到的柱子和最後圓盤移動到的柱子會不同一個，當 N 等於奇數時(不包含 1)，第一個圓盤移動到的柱子和最後圓盤移動到的柱子會是同一個。

2. 移動奇數次一定是移動圓盤①，且圓盤移動具有對稱性與唯一性。

以 N=4 和 N=5 進行討論。當 N=4 的時候：

第 n 次移動	1	2	3	4	5	6	7	8
圓盤	①	②	①	③	①	②	①	④

第 n 次移動	9	10	11	12	13	14	15	
圓盤	①	②	①	③	①	②	①	

當 N=5 的時候；

第 n 次移動	1	2	3	4	5	6	7	8
圓盤	①	②	①	③	①	②	①	④

第 n 次移動	9	10	11	12	13	14	15	16
圓盤	①	②	①	③	①	②	①	⑤

第 n 次移動	17	18	19	20	21	22	23	24
圓盤	①	②	①	③	①	②	①	④

第 n 次移動	25	26	27	28	29	30	31	
圓盤	①	②	①	③	①	②	①	

我們可以看到奇數次所移動的圓盤都是①，且圓盤的移動具有對稱性，移動次數的中間項會是最大的圓盤，而且我們試了很多次，移動次數的軌跡具有唯一性，我們無法找到第二種移動路徑。

3. 大圓盤至小圓盤的移動次數是以首相為 1、公比為 2 的等比數列。

當 N=4 時，圓盤④移動 1 次、圓盤③移動 2 次、圓盤②移動 4 次、圓盤①移動 8 次。當 N=5 時，圓盤⑤移動 1 次、圓盤④移動 2 次、圓盤③移動 4 次、圓盤②移動 8 次、圓盤①移動 16 次(由上表得知)。

4. 如果將圓盤編號，移動的過程中一定是奇數和偶數相間。

在移動的過程中，我們也會遇到最後移動不了的情況(大圓盤壓小圓盤)，如果要順利且快速的完成移動，一定要遵守奇數和偶數相間的移動方式，就能很快的將圓盤移動完畢。

三、四柱河內塔問題之研究。

當 n=1 時，我們知道$a_1 = 1$。當 n=2 時，$a_2 = 3$，並且不會使用到第 4 根柱子。當 n=3 時，$a_3 = 5$，如下圖所示：

A	B	C	D	A	B	C	D
②							
③			①	③		②	①

A	B	C	D	A	B	C	D
					②		
	③	②	①		③		①

A	B	C	D
	①		
	②		
	③		

當 n=4 時，$a_4 = 9$。如下圖所示：

A	B	C	D	A	B	C	D
②							
③				③			
④			①	④		②	①

A	B	C	D	A	B	C	D
						①	
④	③	②	①	④	③	②	

A	B	C	D	A	B	C	D
		①					
	③	②	④	①	③	②	④

A	B	C	D	A	B	C	D
							②
			③				③
①		②	④	①			④

A	B	C	D
			①
			②
			③
			③

我們嘗試 n=4 是否有其他種移動方式，我們找到另外一種移動方式，如下圖所示：

A	B	C	D
②			
③			
④			①

A	B	C	D
③			
④		②	①

A	B	C	D
④	③	②	①

A	B	C	D
	①		
④	③	②	

A	B	C	D
	①		
	③	②	④

A	B	C	D
①	③	②	④

A	B	C	D
			③
①		②	④

A	B	C	D
			②
			③
①			④

A	B	C	D
			①
			②
			③
			④

在第 4 個圖我們將第 1 個圓盤疊在第 3 個圓盤上面，就已經打破了奇數圓盤與偶數圓盤需要相間的特性，也告訴了我們四柱的移動方式不具有唯一性。

我們繼續觀察 n=5，得到$a_5 = 13$。

A	B	C	D	A	B	C	D
②							
③				③			
④				④			
⑤			①	⑤		②	①

A	B	C	D	A	B	C	D
④				④		①	
⑤	③	②	①	⑤	③	②	

A	B	C	D	A	B	C	D
		①				①	③
⑤	③	②	④	⑤		②	④

A	B	C	D	A	B	C	D
		①	③			①	
	⑤	②	④	③	⑤	②	④

A	B	C	D	A	B	C	D
					③		
	④	①			④	①	
③	⑤	②			⑤	②	

A	B	C	D	A	B	C	D
					②		
	③				③		
	④				④		
	⑤	②	①		⑤		①

A	B	C	D
	①		
	②		
	③		
	④		
	⑤		

我們知道四柱的排列方式並非唯一，我們也嘗試找了很多種移動方式，發現移動 13 次是最小值。這 13 次的來源我們可以拆成：2 個圓盤移動四柱+3 個圓盤移動三柱+2 個圓盤移動四柱。運算式子：$13 = 3 + 7 + 3$。相關示意如下圖：

A	B	C	D
③			
④			①
⑤			②

先將 2 個圓盤做四柱的移動

A	B	C	D
	③		
	④		①
	⑤		③

再將 3 個圓盤做三柱的移動

A	B	C	D
	①		
	②		
	③		

最後再將 2 個圓盤做四柱的移動

	④		
	⑤		

這樣的方式也許可行，但是會花掉很多時間，以 N=5 為例，我們可以發現有相當多的組合方式，如下表：

N 的個數	移動方式	移動次數	總次數
5	1 盤四柱+4 盤三柱+1 盤四柱	1+15+1	17
	2 盤四柱+3 盤三柱+2 盤四柱	3+7+3	13
	3 盤四柱+2 盤三柱+3 盤四柱	5+3+5	13
	4 盤四柱+1 盤三柱+4 盤四柱	9+1+9	19

由上表得知 N=5 時，移動的最小值為 13 次。我們依照這樣的模式找尋當 N=6、7、8 的情況，分析如下表：

N 的個數	移動方式	移動次數	總次數
6	1 盤四柱+5 盤三柱+1 盤四柱	1+31+1	33
	2 盤四柱+4 盤三柱+2 盤四柱	3+15+3	21
	3 盤四柱+3 盤三柱+3 盤四柱	5+7+5	17
	4 盤四柱+2 盤三柱+4 盤四柱	9+3+9	21
	5 盤四柱+1 盤三柱+5 盤四柱	13+1+13	27
7	1 盤四柱+6 盤三柱+1 盤四柱	1+63+1	65
	2 盤四柱+5 盤三柱+2 盤四柱	3+31+3	37
	3 盤四柱+4 盤三柱+3 盤四柱	5+15+5	25
	4 盤四柱+3 盤三柱+4 盤四柱	9+7+9	25
	5 盤四柱+2 盤三柱+5 盤四柱	13+3+13	29
	6 盤四柱+1 盤三柱+6 盤四柱	17+1+17	35
8	1 盤四柱+7 盤三柱+1 盤四柱	1+127+1	129
	2 盤四柱+6 盤三柱+2 盤四柱	3+63+3	69
	3 盤四柱+5 盤三柱+3 盤四柱	5+31+5	41
	4 盤四柱+4 盤三柱+4 盤四柱	9+15+9	33
	5 盤四柱+3 盤三柱+5 盤四柱	13+7+13	33
	6 盤四柱+2 盤三柱+6 盤四柱	17+3+17	37
	7 盤四柱+1 盤三柱+7 盤四柱	25+1+25	51

我們可以發現$a_6 = 17$、$a_7 = 25$、$a_8 = 33$，從以上的表格我們可以看出來分成兩個數量比較相近的兩堆圓盤這樣移動的次數會較少，如 N=6 時應該分成 3 盤四柱+3 盤三柱，N=7 時應該分成 3 盤四柱+4 盤三柱或 4 盤四柱+3 盤三柱，

N=8 時應該分成 4 盤四柱+4 盤三柱或 5 盤四柱+3 盤三柱。但是這樣的分析太過粗糙，無法保證當 N=100 時，要分成 50 盤四柱+50 盤三柱或 51 盤四柱+49 盤三柱哪一個才擁有最小值(因為 50 盤四柱也必須使用疊帶法才能找出它的值)，況且無法保證是否其中有例外，只能猜想這樣分折的邏輯是對的。

從以上的分析我們還是希望可以找到這個數列是否有一定的規律或是可以用一般式來表示，我們將已經確認的圓盤移動次數列出來：

$a_1 = 1$、$a_2 = 3$、$a_3 = 5$、$a_4 = 9$、$a_5 = 13$、$a_6 = 17$、$a_7 = 25$、$a_8 = 33$。

因為這樣的分析數量還是太少，我們參酌了長榮中學科展篇名：Hold 柱爭環傳這篇文章，得到

$a_1 = 1$、$a_2 = 3$、$a_3 = 5$、$a_4 = 9$、$a_5 = 13$、$a_6 = 17$、$a_7 = 25$、$a_8 = 33$、$a_9 = 41$、$a_{10} = 49$、$a_{11} = 65$、$a_{12} = 81$、$a_{13} = 97$、$a_{14} = 113$、$a_{15} = 129$。

我們發現這個數列有一定的規律，規律如下表：

$a_2 - a_1$	$a_3 - a_2$	$a_4 - a_3$	$a_5 - a_4$	$a_6 - a_5$	$a_7 - a_6$	$a_8 - a_7$
2	2	4	4	4	8	8
$a_9 - a_8$	$a_{10} - a_9$	$a_{11} - a_{10}$	$a_{12} - a_{11}$	$a_{13} - a_{12}$	$a_{14} - a_{13}$	$a_{15} - a_{14}$
8	8	16	16	16	16	16

我們可以將每個圓盤移動次數寫成：

$a_1 = 1$
$a_2 = 3 = 1 + 2$
$a_3 = 5 = 1 + 2 + 2$
$a_4 = 9 = 1 + 2 + 2 + 4$
$a_5 = 13 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4$
$a_6 = 17 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4$
$a_7 = 25 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8$
$a_8 = 33 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8$
$a_9 = 41 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8$
$a_{10} = 49 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8$
$a_{11} = 65 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 16$
$a_{12} = 81 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 16 + 16$
$a_{13} = 97 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 16 + 16 + 16$

$a_{14} = 113 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 16 + 16 + 16 + 16$
$a_{15} = 129 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16$

從以上我們可以看到四柱的移動次數是由 1 個 1、2 個 2、3 個 4、4 個 8、5 個 16 所組成的，接下來可以大膽推測下一項應該是 6 個 32、7 個 64、8 個 128 所組成。

如果將上述寫成數學的一般式(其中 a 和 b 都是整數)，應該為
$1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + 6 \times 2^5 + \cdots + a \times 2^{a-1} + b \times 2^a$
，$1 \leq \mathrm{b} \leq \mathrm{a}$。

$a_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + a \times 2^{a-1} + b \times 2^a$，$1 \leq \mathrm{b} \leq \mathrm{a}$。

$$(\mathrm{n} = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{a} - 1 + \mathrm{a} + \mathrm{b})$$

以 n=100 來說，$\mathrm{n} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 12 + 13 + 9$，故 a=13、b=9，帶入上述公式，可以得知$a_{100} = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + 13 \times 2^{12} + 9 \times 2^{13}$。這樣的計算方式必須先找出 a、b 值，無法直接代入一條公式直接計算出答案。

伍、研究結果

我們找出三柱河內塔第 n 次移動次數為$a_n = 2^n - 1$，並且用數學歸納法證明這個式子是對的，能符合所有情形。回到一開始研究的那 64 個圓盤移動完是否會造成世界末日，我們就親自計算一下。我們查表得知$a_{64} = 2^{64} - 1 =$ 18,446,744,073,709,551,615。這樣的天文數字不必擔心世界末日，人類早就不存在了。

我們可以利用奇數次一定是移動最小的圓盤及奇數圓盤必需和偶數圓盤相間這個特性，迅速的將圓盤的移動完成。我們可以利用對稱性，將移動的軌跡找出來。

四柱的河內塔模型我們發現移動方式並非唯一，故讓分析變得相當困難。我們只能從四柱的最少移動次數加上三柱最少移動次數去推算四柱的最少移動次數，我們將數列排出來，推導出四柱的移動次數模型為$a_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + a \times 2^{a-1} + b \times 2^a$，$1 \leq \mathrm{b} \leq \mathrm{a}$。$(\mathrm{n} = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{a} - 1 + \mathrm{a} + \mathrm{b})$。

陸、未來展望

關於三柱河內塔問題相關研究已經完備，可以增加限制條件的方式進行研究。四柱河內塔問題可以嘗試寫出一般式，或增加其限制條件，也可以嘗試對於五柱河內塔移動問題進行相關研究。

柒、參考資料

1. 河內塔之謎…國中版，交大網路專班，李政憲。
2. 變形河內塔，新北市土城國中 102 學年度校內科學展覽。
3. 數學 101 河內塔變身，第 50 屆中小學科學展覽，臺北縣永和市秀朗國民小學。
4. 河內塔分奇偶之探討，台南縣私立南光高中。
5. 遞迴數列，台中市私立衛道中學數學科退休教師，江慶昱。
6. 河內塔之深入研究，國立楊梅高中數學科教師，許技江。
7. Hold 柱爭環傳，長榮中學。