中華民國第五十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：線段幾何量之尺規作圖探討

關 鍵 詞：線段幾何量、尺規作圖

編　　號：

線段幾何量之尺規作圖探討

摘要

國中數學課本第一冊，利用在數線上畫線段的方法，理解數字的加減法運算。配合第四冊尺規作圖等線段的概念及第五冊相似形的性質，進一步作出數字的乘除法運算、乘冪及平方根。

壹、研究動機

記得在八年級，第一次開始接觸尺規作圖單元時，學到了線段與角的兩等分，老師曾提過數學幾何三大難題，其中之一是三等分角的問題：並不是所有的角都可以用尺規作圖作三等分。那時我就想：角不能三等分，那麼線段是不是也不能三等分？九年級上學期學到相似形的單元時，利用平行線截等線段性質，竟然可以將任意線段作任意等分，超出了我原先的想法，這激起我對線段幾何量尺規作圖的興趣，因此找了幾位同學一起蒐集資料進行研究。

貳、研究目的

一、利用 1 單位長及一或兩個給定線段之尺規作圖，做出一條代表數的四則運算、乘冪及平方根的線段。

二、以尺規作圖畫出數在數線上的對應位置。

參、研究器材

直尺、圓規、紙、筆、電腦

肆、研究過程

一、加法：

【已知】如右圖，$\overline{AB}$=m，$\overline{CD}$=n

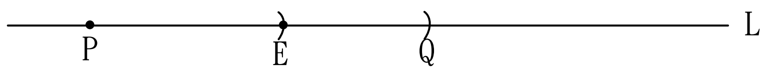
【求作】$\overline{PQ}$，使得 $\overline{PQ}=\overline{AB}+\overline{CD}$=m+n

【作法】1.作一直線 L。

2.在直線 L 上任意取一點 P，並以 P 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑，在 P 的右側畫弧，交直線 L 於 E 點。

3.再以 E 為圓心，$\overline{CD}$ 為半徑，在 E 的右側畫弧，交直線 L 於 Q 點。

4.則 $\overline{PQ}$ 即為所求。如下圖所示。



二、減法：

【已知】如右圖，$\overline{AB}$=m，$\overline{CD}$=n，假設 m>n

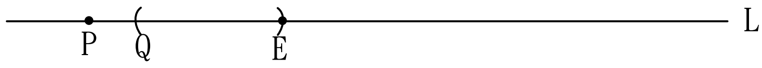
【求作】$\overline{PQ}$，使得 $\overline{PQ}=\overline{AB}-\overline{CD}$=m-n

【作法】1.作一直線 L。

2.在直線 L 上任意取一點 P，並以 P 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑，在 P 的右側畫弧，交直線 L 於 E 點。

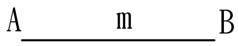
3.再以 E 為圓心，$\overline{CD}$ 為半徑，在 E 的左側畫弧，交直線 L 於 Q 點。

4.則 $\overline{PQ}$ 即為所求。如下圖所示。



三、乘法：

(一)【已知】如右圖，$\overline{AB}$=m



【求作】$\overline{PQ}$，使得$\overline{PQ}$=k×$\overline{AB}$=km，其中 k 是正整數

【作法】1.作一直線 L。

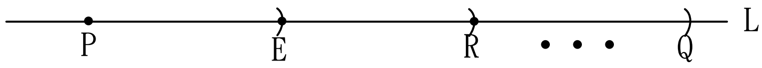
2.在直線 L 上任意取一點 P，並以 P 為圓心，$\overline{AB}$為半徑，在 P 的右側畫弧，交直線 L 於 E 點。

3.再以 E 為圓心，$\overline{AB}$為半徑，在 E 的右側畫弧，交直線 L 於 R 點。

4.則$\overline{PR}$=m+m=2m。如下圖所示。

5.仿步驟 3 作法，再重覆作(k-2)次，所得之點即為 Q 點。

6.則$\overline{PQ}$即為所求。如下圖所示。



(二)【已知】如右圖，$\overline{AB}$=m，$\overline{CD}$=n

【求作】$\overline{PQ}$，使得$\overline{PQ}=\overline{AB}\times\overline{CD}$=m×n

【作法】1.作兩直線 L 與 K，交於 P 點。

2.以 P 為圓心，取 1 單位的長度為半徑畫弧，交直線 L 於 E 點。

3.同樣地，以 P 為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫弧，交直線 L 於 F 點。

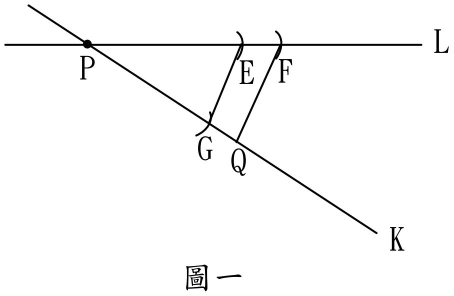
4.再同樣地，以 P 為圓心，$\overline{CD}$為半徑畫弧，交直線 K 於 G 點。

5.連接$\overline{EG}$。

6.過 F 點作$\overline{FQ}$ // $\overline{EG}$交直線 K 於 Q 點。

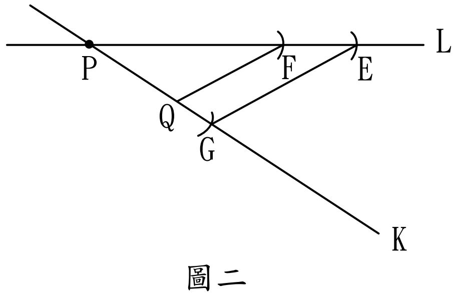
7.則$\overline{PQ}$即為所求。如下圖所示。

（1）m>1 的情形：



圖一

（2）m<1 的情形：



圖二

【證明】1.若 m=1，則$\overline{PQ}=\overline{AB}\times\overline{CD}$=m×n=n，只需利用等線段之尺規作圖即可完成。

2.若 m>1，即$\overline{PF}>\overline{PE}$，如上圖一所示

$\because \overline{EG} // \overline{FQ}$

$\therefore \dfrac{\overline{PG}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{PF}}$，即$\dfrac{n}{\overline{PQ}}=\dfrac{1}{m}$

故得 $\overline{PQ}$=m×n

3.若 m<1，即 $\overline{PF} < \overline{PE}$ ，如上圖二所示

$\because \overline{FQ} // \overline{EG}$

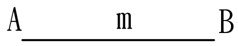
$\therefore \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PG}} = \dfrac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$ ，即 $\dfrac{\overline{PQ}}{n} = \dfrac{m}{1}$

故得 $\overline{PQ}$=m×n

4.由以上討論可知，對任意已知正數 m，上述尺規作圖法恆正確。

四、除法：

(一)【已知】如右圖， $\overline{AB}$=m



【求作】 $\overline{PQ}$ ，使得 $\overline{PQ} = \overline{AB}$ ÷k=m÷k，其中 k 是正整數

【作法】1.作兩直線 L 與 K，交於 P 點。

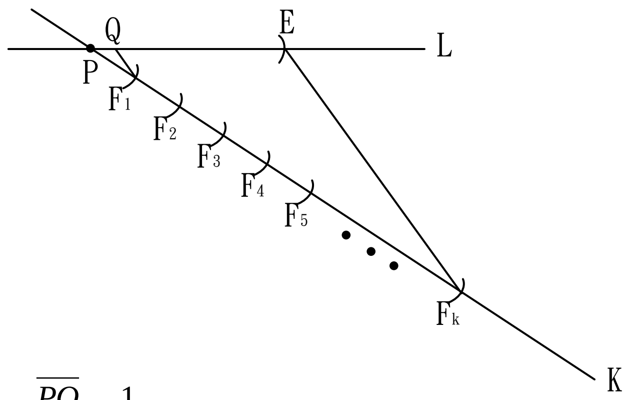
2.在直線 L 上任意取一點 P，並以 P 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑，在 P 的右側畫弧，交直線 L 於 E 點。

3.在直線 K 上依序截取 k 個點 F_1、F_2、F_3、⋯、F_k，使得 $\overline{PF_1} = \overline{F_1F_2} = \overline{F_2F_3} = \cdots = \overline{F_{k-1}F_k}$ 。

4.連接 $\overline{EF_k}$ 。

5.過 F_1 點作 $\overline{F_1Q} // \overline{EF_k}$ 交直線 L 於 Q 點。

6.則 $\overline{PQ}$ 即為所求。如下圖所示。

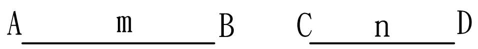


【證明】$\because \overline{F_1Q} // \overline{F_kE}$

$\therefore \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PE}} = \dfrac{\overline{PF_1}}{\overline{PF_k}}$ ，即 $\dfrac{\overline{PQ}}{m} = \dfrac{1}{k}$

故得 $\overline{PQ}$=m÷k

(二)【已知】如右圖， $\overline{AB}$=m， $\overline{CD}$=n



【求作】 $\overline{PQ}$ ，使得 $\overline{PQ} = \overline{AB} \div \overline{CD}$=m÷n

【作法】1.作兩直線 L 與 K，交於 P 點。

2.以 P 為圓心，取 1 單位的長度為半徑畫弧，交直線 L 於 E 點。

3.同樣地，以 P 為圓心，$\overline{CD}$ 為半徑畫弧，交直線 L 於 F 點。

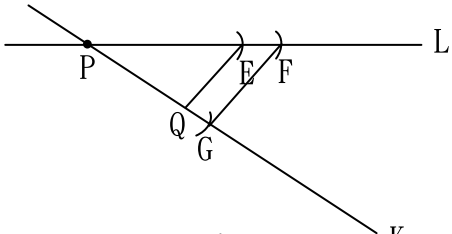
4.再同樣地，以 P 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑畫弧，交直線 K 於 G 點。

5.連接 $\overline{FG}$ 。

6.過 E 點作 $\overline{EQ} // \overline{FG}$ 交直線 K 於 Q 點。

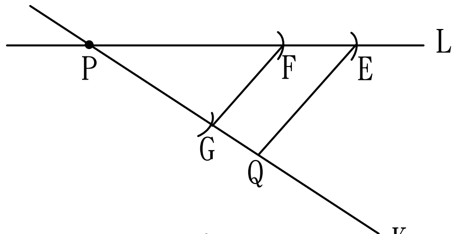
7.則 $\overline{PQ}$ 即為所求。如下圖所示。

（1）n>1 的情形：



圖三

（2）n<1 的情形：



圖四

【證明】1.若 n=1，則 $\overline{PQ}=\overline{AB}\div\overline{CD}$=m÷n=m，只需利用等線段之尺規作圖即可完成。

2.若 n>1，即 $\overline{PF}>\overline{PE}$，如上圖三所示

$\because \overline{EQ}\,//\,\overline{FG}$

$\therefore \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PG}}=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{PF}}$，即 $\dfrac{\overline{PQ}}{m}=\dfrac{1}{n}$

故得 $\overline{PQ}$=m÷n

3.若 n<1，即 $\overline{PF}<\overline{PE}$，如上圖四所示

$\because \overline{FG}\,//\,\overline{EQ}$

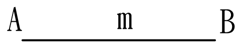
$\therefore \dfrac{\overline{PG}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$，即 $\dfrac{m}{\overline{PQ}}=\dfrac{n}{1}$

故得 $\overline{PQ}$=m÷n

4.由以上討論可知，對任意已知正數 n，上述尺規作圖法恆正確。

五、乘冪：

【已知】如右圖，$\overline{AB}$=m



【求作】1. $\overline{PQ_1}$，使得 $\overline{PQ_1}=\overline{AB}^2$=m^2

2. $\overline{PQ_2}$，使得 $\overline{PQ_2}=\overline{AB}^3$=m^3

【作法】1.作兩直線 L 與 K，交於 P 點。

2.以 P 為圓心，取 1 單位的長度為半徑畫弧，交直線 L 於 E 點。

3.以 P 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧，分別交直線 L、K 於 F、G 點。

4.連接 $\overline{EG}$。

5.過 F 點作 $\overline{FQ_1}\,//\,\overline{EG}$ 交直線 K 於 Q_1 點。

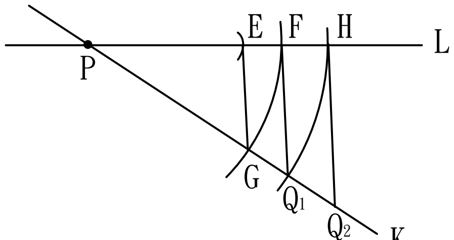
6.則 $\overline{PQ_1}$ 即為所求。如下圖所示。

7.再以 P 為圓心，$\overline{PQ_1}$ 為半徑畫弧，交直線 L 於 H 點。

8.過 H 點作 $\overline{HQ_2}\,//\,\overline{EG}$ 交直線 K 於 Q_2 點。

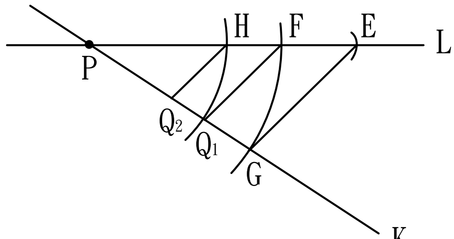
9.則 $\overline{PQ_2}$ 即為所求。如下圖所示。

（1）m>1 的情形：



圖五

（2）m<1 的情形：



圖六

【證明】1.若 m=1，則$\overline{PQ_1}$=1^2=1，$\overline{PQ_2}$=1^3=1，均為 1 單位長的線段。

2.若 m>1，即$\overline{PF}>\overline{PE}$，如上圖五所示

$\because \overline{EG} // \overline{FQ_1}$ $\therefore \dfrac{\overline{PG}}{\overline{PQ_1}}=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{PF}}$

即$\dfrac{m}{\overline{PQ_1}}=\dfrac{1}{m}$ $\therefore \overline{PQ_1}$=$m^2$

$\because \overline{EG} // \overline{HQ_2}$ $\therefore \dfrac{\overline{PG}}{\overline{PQ_2}}=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{PH}}$ ($\because \overline{PH}=\overline{PQ_1}$=$m^2$)

即$\dfrac{m}{\overline{PQ_2}}=\dfrac{1}{m^2}$ $\therefore \overline{PQ_2}$=$m^3$

2.若 m<1，即$\overline{PF}<\overline{PE}$，如上圖六所示

$\because \overline{FQ_1} // \overline{EG}$ $\therefore \dfrac{\overline{PQ_1}}{\overline{PG}}=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$

即$\dfrac{\overline{PQ_1}}{m}=\dfrac{m}{1}$ $\therefore \overline{PQ_1}$=$m^2$

$\because \overline{HQ_2} // \overline{EG}$ $\therefore \dfrac{\overline{PQ_2}}{\overline{PG}}=\dfrac{\overline{PH}}{\overline{PE}}$ ($\because \overline{PH}=\overline{PQ_1}$=$m^2$)

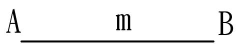
即$\dfrac{\overline{PQ_2}}{m}=\dfrac{m^2}{1}$ $\therefore \overline{PQ_2}$=$m^3$

4.由以上討論可知，對任意已知正數 m，上述尺規作圖法恆正確。

【推廣】仿上述尺規作圖的方法，可作出$\overline{PQ_{n-1}}=\overline{AB}^n$=$m^n$，其中 n 是正整數。

六、平方根：

【已知】如右圖，$\overline{AB}$=m



【求作】$\overline{PQ}$，使得$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{AB}}=\sqrt{m}$

【作法】1.作一直線 L。

2.在直線 L 上任意取一點 P。

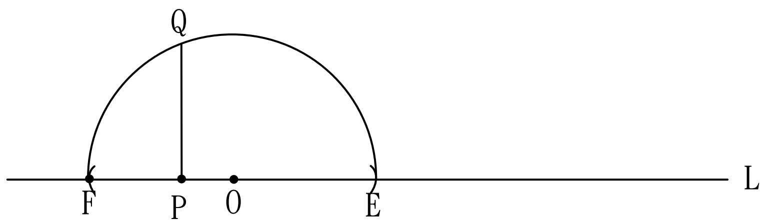
3.以 P 為圓心，$\overline{AB}$為半徑，在 P 的右側畫弧，交直線 L 於 E 點。

4.同樣地，以 P 為圓心，取 1 單位的長度為半徑，在 P 的左側畫弧，交直線 L 於 F 點。

5.以$\overline{EF}$為直徑作一半圓 O。

6.過 P 作$\overline{PQ}\perp\overline{EF}$，交半圓 O 於 Q 點。

7.則$\overline{PQ}$即為所求。如下圖所示。



【證明】1.如右圖，連接$\overline{EQ}$及$\overline{FQ}$

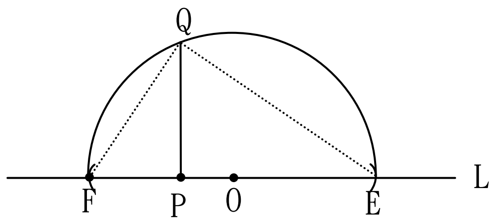
則∠EQF=90° (半圓的圓周角)

2.又$\overline{PQ} \perp \overline{EF}$

3.由直角三角形的母子相似性質知

$\overline{PQ}^2 = \overline{PE} \times \overline{PF}$=m×1=m

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{m}$



七、應用：

(一)整數 n 在數線上的位置：

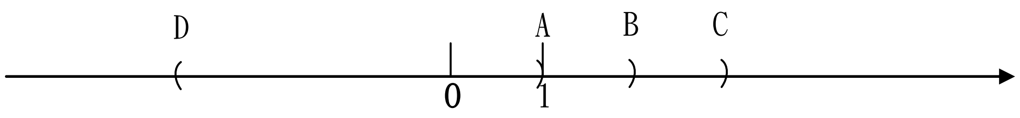
例如：在數線上找出表示 3 及-3 的位置。

【作法】1.在數線原點 O 的右側依序截取三點 A、B、C，

使得$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}$=1 單位長。

2.以 O 為圓心，$\overline{OC}$為半徑在 O 的左側畫弧，交數線於 D。

3.則 C(3)、D(-3)即為所求。



(二)分數$\frac{m}{n}$(或小數)在數線上的位置：

例如：在數線上找出表示$\frac{3}{4}$及-$\frac{3}{4}$的位置。

【作法】1.先以(一)整數 n 在數線上的位置的找法，找到 C(3)點。

2.過 O 作一條異於此數線的一直線 L

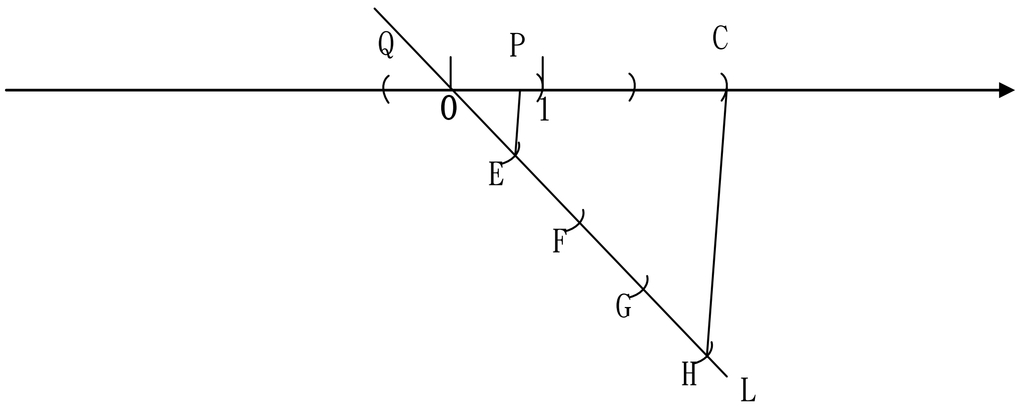
3.在直線 L 上依序截取四點 E、F、G、H，使得$\overline{OE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$。

4.連接$\overline{HC}$。

5.過 E 作$\overline{EP} // \overline{HC}$交數線於 P 點。

6.以 O 為圓心，$\overline{OP}$為半徑在 O 的左側畫弧，交數線於 Q。

7.則 P($\frac{3}{4}$)、Q(-$\frac{3}{4}$)即為所求。



(三) $\sqrt{m}$ 在數線上的位置：

例如：在數線上找出表示 $\sqrt{5}$ 及- $\sqrt{5}$ 的位置。

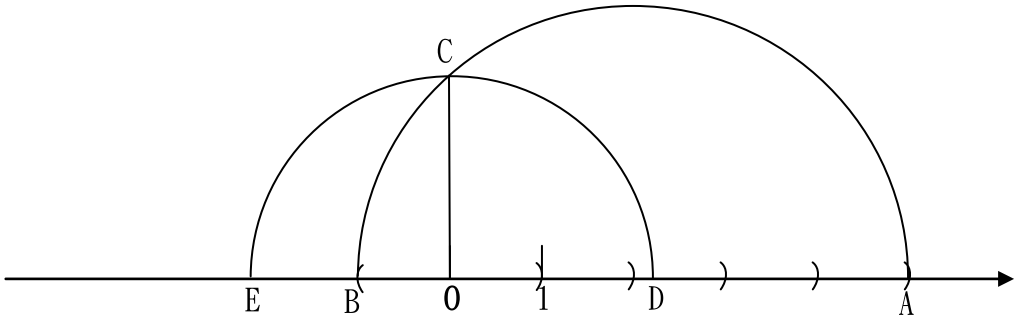
【作法】1.先以(一)整數 n 在數線上的位置的找法，找到 A(5)點及 B(-1)點。

2 .以 $\overline{AB}$ 為直徑作一半圓。

3.過 O 作 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ ，交半圓於 C 點。

4.以 O 為圓心，$\overline{OC}$ 為半徑畫弧，交數線於 D、E 兩點。

3.則 D($\sqrt{5}$)、E(- $\sqrt{5}$)即為所求。



伍、研究結果

一、在同一個尺規作圖的問題中，我們可以採用不同的策略進行作圖。

二、在給定 1 單位長的前提下，國中階段所學的數(包括整數、分數、小數及其平方根)，均可用尺規作圖的方法將它們畫在數線上。

三、並非所有的數都可以用尺規作圖作出(例如：圓周率)。

陸、結論

一、尺規作圖仍有其限制，並非所有的數都能利用尺規作圖在數線上標示其對應位置。

二、運用尺規作圖在數線上畫出代表 $\sqrt{m}$ 的數，使我們對於第三冊所學的平方根，有了更具體的認識。

柒、參考資料

一、國中數學第一冊。

二、國中數學第四冊。

三、國中數學第五冊。

四、神秘有趣的數學—孫文先編譯。