

# 金門地區第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：神機妙算

關 鍵 詞：二位數、乘法、速算法

編 號：

# 作品名稱：神機妙算

## 摘要

本研究討論「二位數乘法的速算法」，二位數乘法與國中乘法的分配律有相當大的關聯，知道速算的技巧不僅能提升計算速度，讓我們思考並了解速算法的原理，歸納出有用的知識。

## 壹、研究動機

每到數學考試，我們就感到特別的憂心，我們的數學成績總是起起伏伏，無法穩定，而幾次考試後我們找出了原因—運算速度太慢或計算錯誤。

即便九九乘法表背得再熟、運算練習再多次，只要遇到了二位數乘二位數我們就完全沒輒了，只能仰賴小學學過的直式運算，速度如同小蝸牛行走、如同小烏龜爬行，那緩慢的速度使我們的答題速度大打折扣。

但我們覺得條條大道通羅馬，運算的方法絕對不只一種，應該還有其他更快的運算方式，因此我們便開始投入二位數乘法速算法的研究。

## 貳、研究目的

- 一、如何更快算出任一二位數乘上 11？
- 二、如何更快算出 $15^2$ 、 $25^2$ 、 $35^2$ 、……、 $85^2$ 、 $95^2$ ？
- 三、印度 1919 乘法— $12*12\sim 19*19$  的數學原理？
- 四、如何更快算出十位數字皆是 9 的二位數相乘？
- 五、如何更快算出十位數字相同的二位數相乘？
- 六、有什麼速算法是任意二位數相乘都適用？

## 參、研究設備及器材

計算機、紙、筆、電腦

## 肆、研究過程

### 一、任一二位數乘 11

例題	數學原理	結論
24 × 11	$24 \times 11 = (20+4)(10+1)$ $= 20 \times 10 + 20 \times 1 + 4 \times 10 + 4 \times 1$ $= 264$	$\underline{2} \quad \underline{2+4} \quad \underline{4}$
58 × 11	$58 \times 11 = (50+8)(10+1)$ $= 50 \times 10 + 50 \times 1 + 8 \times 10 + 8 \times 1$ $= 638$	$\underline{5} \quad \underline{5+8} \quad \underline{8}$ $= \underline{6} \quad \underline{3} \quad \underline{8}$

一般化	數學原理	結論
ab × 11	$ab \times 11 = (10a+b)(10+1)$ $= 100a + 10a + 10b + b$ $= 100a + 10(a+b) + b$	$\underline{a} \quad \underline{a+b} \quad \underline{b}$

### 二、15<sup>2</sup>、25<sup>2</sup>、35<sup>2</sup>、……、85<sup>2</sup>、95<sup>2</sup>

例題	數學原理	結論
15 × 15	$15 \times 15 = (10+5)(10+5)$ $= 10 \times 10 + 10 \times 5 + 5 \times 10 + 5 \times 5$ $= 225$	$\underline{1 \times (1+1)} \quad \underline{5 \times 5}$
25 × 25	$25 \times 25 = (20+5)(20+5)$ $= 20 \times 20 + 20 \times 5 + 5 \times 20 + 5 \times 5$ $= 625$	$\underline{2 \times (2+1)} \quad \underline{5 \times 5}$

35 × 35	$35 \times 35 = (30+5)(30+5)$ $= 30 \times 30 + 30 \times 5 + 5 \times 30 + 5 \times 5$ $= 1225$	<u>3*(3+1)</u> <u>5*5</u>
55 × 55	$55 \times 55 = (50+5)(50+5)$ $= 50 \times 50 + 50 \times 5 + 5 \times 50 + 5 \times 5$ $= 3025$	<u>5*(5+1)</u> <u>5*5</u>
85 × 85	$85 \times 85 = (80+5)(80+5)$ $= 80 \times 80 + 80 \times 5 + 5 \times 80 + 5 \times 5$ $= 7225$	<u>8*(8+1)</u> <u>5*5</u>
95 × 95	$95 \times 95 = (90+5)(90+5)$ $= 90 \times 90 + 90 \times 5 + 5 \times 90 + 5 \times 5$ $= 9025$	<u>9*(9+1)</u> <u>5*5</u>

一般化	數學原理	結論
a5 × a5	$a5 \times a5 = (10a+5)(10a+5)$ $= 100a^2 + 50a + 50a + 5 \times 5$ $= 100a^2 + 100a + 25$	<u>a*(a+1)</u> <u>5*5</u>

### 三、1919 乘法—12\*12~19\*19 數學原理

例題	數學原理	結論
12 × 12	$12 \times 12 = (10+2)(10+2)$ $= 10 \times 10 + 10 \times 2 + 2 \times 10 + 2 \times 2$ $= 10 \times (10+2) + 2 \times 2$	$10 \times (12+2) + 2 \times 2$

12× 13	$12 \times 13 = (10+2)(10+3)$ $= 10*10 + 10*3 + 2*10 + 2*3$ $= 10*(12+3) + 2*3$ $= 156$	$10*(12+3) + 2*3$
12 × 14	$12 \times 14 = (10+2)(10+4)$ $= 10*10 + 10*4 + 2*10 + 2*4$ $= 10*(12+4) + 2*4$ $= 168$	$10*(12+4) + 2*4$
12*15～12*19 皆可以此類推		
例題	數學原理	結論
13 × 13	$13 \times 13 = (10+3)(10+3)$ $= 10*10 + 10*3 + 3*10 + 3*3$ $= 10*(13+3) + 3*3$ $= 169$	$10*(13+3) + 3*3$
13× 14	$13 \times 14 = (10+3)(10+4)$ $= 10*10 + 10*4 + 3*10 + 3*4$ $= 10*(13+4) + 3*4$ $= 182$	$10*(13+4) + 3*4$
13*15～13*19 皆可以此類推		
例題	數學原理	結論
14 × 14	$14 \times 14 = (10+4)(10+4)$ $= 10*10 + 10*4 + 4*10 + 4*4$ $= 10*(14+4) + 4*4$ $= 196$	$10*(14+4) + 4*4$

14× 15	$14 \times 15 = (10+4)(10+5)$ $= 10 \times 10 + 10 \times 5 + 4 \times 10 + 4 \times 5$ $= 10 \times (14+5) + 4 \times 5$ $= 210$	$10 \times (14+5) + 4 \times 5$
14*16~19*19 皆可以此類推		

結論	結論
$12 \times 12 = 10 \times (12+2) + 2 \times 2 = 144$ $12 \times 13 = 10 \times (12+3) + 2 \times 3 = 156$ $12 \times 14 = 10 \times (12+4) + 2 \times 4 = 168$ $12 \times 15 = 10 \times (12+5) + 2 \times 5 = 180$ $12 \times 16 = 10 \times (12+6) + 2 \times 6 = 192$ $12 \times 17 = 10 \times (12+7) + 2 \times 7 = 204$ $12 \times 18 = 10 \times (12+8) + 2 \times 8 = 216$ $12 \times 19 = 10 \times (12+9) + 2 \times 9 = 228$	$13 \times 13 = 10 \times (13+3) + 3 \times 3 = 169$ $13 \times 14 = 10 \times (13+4) + 3 \times 4 = 182$ $13 \times 15 = 10 \times (13+5) + 3 \times 5 = 195$ $13 \times 16 = 10 \times (13+6) + 3 \times 6 = 208$ $13 \times 17 = 10 \times (13+7) + 3 \times 7 = 221$ $13 \times 18 = 10 \times (13+8) + 3 \times 8 = 234$ $13 \times 19 = 10 \times (13+9) + 3 \times 9 = 247$
結論	結論
$14 \times 14 = 10 \times (14+4) + 4 \times 4 = 196$ $14 \times 15 = 10 \times (14+5) + 4 \times 5 = 210$ $14 \times 16 = 10 \times (14+6) + 4 \times 6 = 224$ $14 \times 17 = 10 \times (14+7) + 4 \times 7 = 238$ $14 \times 18 = 10 \times (14+8) + 4 \times 8 = 252$ $14 \times 19 = 10 \times (14+9) + 4 \times 9 = 266$	$15 \times 15 = 10 \times (15+5) + 5 \times 5 = 225$ $15 \times 16 = 10 \times (15+6) + 5 \times 6 = 240$ $15 \times 17 = 10 \times (15+7) + 5 \times 7 = 255$ $15 \times 18 = 10 \times (15+8) + 5 \times 8 = 270$ $15 \times 19 = 10 \times (15+9) + 5 \times 9 = 285$

結論	結論
$16 \times 16 = 10*(16+6) + 6*6 = 256$ $16 \times 17 = 10*(16+7) + 6*7 = 272$ $16 \times 18 = 10*(16+8) + 6*8 = 288$ $16 \times 19 = 10*(16+9) + 6*9 = 304$	$17 \times 17 = 10*(17+7) + 7*7 = 289$ $17 \times 18 = 10*(17+8) + 7*8 = 306$ $17 \times 19 = 10*(17+9) + 7*9 = 323$
結論	結論
$18 \times 18 = 10*(18+8) + 8*8 = 324$ $18 \times 19 = 10*(18+9) + 8*9 = 342$	$19 \times 19 = 10*(19+9) + 9*9 = 361$

一般化	數學原理	結論
$1a \times 1b$	$1a \times 1b = (10+a)(10+b)$ $= 10*10 + 10b + 10a + a*b$ $= 10(10+a+b) + a*b$	$10(10+a+b) + a*b$

#### 四、十位數字皆是 9 的二位數乘法

例題	數學原理	結論
$97 \times 92$	$97 \times 92 = (100-3)(100-8)$ $= 100*100 - 100*8 - 100*3 + 3*8$ $= 100(100-8-3) + 3*8$ $= 8924$	$100(100-8-3) + 3*8$
$99 \times 96$	$99 \times 96 = (100-1)(100-4)$ $= 100*100 - 100*4 - 100*1 + 1*4$ $= 100(100-4-1) + 1*4$ $= 9504$	$100(100-4-1) + 1*4$

一般化	數學原理	結論
$9a \times 9b$	$9a+c=100, 9b+d=100$ $9a \times 9b = (100-c)(100-d)$ $= 100 \times 100 - 100d - 100c + c \times d$ $= 100(100-c-d) + c \times d$	$100(100-c-d) + c \times d$

### 五、十位數字相同的二位數乘法

例題	數學原理	結論
$25 \times 26$	$25 \times 26 = (20+5)(20+6)$ $= 20 \times 20 + 20 \times 6 + 20 \times 5 + 5 \times 6$ $= 20 \times (20+5+6) + 5 \times 6$ $= 20 \times (25+6) + 5 \times 6$ $= 650$	$20 \times (\text{被乘數} + \text{乘數的個位數}) +$ $\text{被乘數的個位數} \times \text{乘數的個位數}$
$52 \times 58$	$52 \times 58 = (50+2)(50+8)$ $= 50 \times 50 + 50 \times 8 + 50 \times 2 + 2 \times 8$ $= 50 \times (50+2+8) + 2 \times 8$ $= 50 \times (52+8) + 2 \times 8$ $= 3016$	$50 \times (\text{被乘數} + \text{乘數的個位數}) +$ $\text{被乘數的個位數} \times \text{乘數的個位數}$
$84 \times 89$	$84 \times 89 = (80+4)(80+9)$ $= 80 \times 80 + 80 \times 9 + 80 \times 4 + 4 \times 9$ $= 80 \times (80+4+9) + 4 \times 9$ $= 80 \times (84+9) + 4 \times 9$ $= 7476$	$80 \times (\text{被乘數} + \text{乘數的個位數}) +$ $\text{被乘數的個位數} \times \text{乘數的個位數}$



一般化	數學原理	結論
maxmb	$\begin{aligned} \max mb &= (10m+a)(10m+b) \\ &= 100m^2 + 10mb + 10ma + ab \\ &= 10m(10m+a+b) + ab \\ &= 10m*(ma+b) + ab \end{aligned}$	$10m*(\text{被乘數} + \text{乘數的個位數}) + \text{被乘數的個位數} * \text{乘數的個位數}$

### 六、任意兩個二位數相乘

例題	數學原理	結論
24 × 32	$\begin{aligned} 24 \times 32 &= (20+4)(30+2) \\ &= 20*30 + 20*2 + 30*4 + 4*2 \\ &= 2*3*100 + (2*2+3*4)*10 + 4*2 \\ &= 600 + 160 + 8 \\ &= 768 \end{aligned}$	$\underline{2*3} \quad \underline{2*2+4*3} \quad \underline{4*2}$
57 × 69	$\begin{aligned} 57 \times 69 &= (50+7)(60+9) \\ &= 50*60 + 50*9 + 60*7 + 7*9 \\ &= 5*6*100 + (5*9+7*6)*10 + 7*9 \\ &= 3000 + 870 + 63 \\ &= 3933 \end{aligned}$	$\underline{5*6} \quad \underline{5*9+7*6} \quad \underline{7*9}$

一般化	數學原理	結論
AB × CD	$\begin{aligned} (10A+B)(10C+D) \\ &= 100AC + 10AD + 10BC + BD \\ &= 100AC + 10(AD+BC) + BD \end{aligned}$	$\underline{A*C} \quad \underline{A*D+B*C} \quad \underline{B*D}$

圖示法

$$\frac{AC*100 \left\langle \begin{array}{c} A \quad B \\ \times \\ C \quad D \end{array} \right\rangle BD*1}{(BC+AD)*10}$$

## 伍、研究結果

一、任一二位數乘 11：

$$\text{二位數 } ab \times 11 = \underline{a} \quad \underline{a+b} \quad \underline{b}$$

二、 $15^2$ 、 $25^2$ 、 $35^2$ 、……、 $85^2$ 、 $95^2$

$$\text{二位數 } a5 \times \text{二位數 } a5 = a*(a+1)*100 + 5*5$$

三、1919 乘法— $12*12 \sim 19*19$  數學原理：見前列表格

四、十位數字皆是 9 的二位數相乘：

$$\text{二位數 } 9a \times \text{二位數 } 9b, \text{ 其中 } 9a+c=100, 9b+d=100$$

$$9a \times 9b = 100(100-c-d) + c*d$$

五、十位數字相同的二位數相乘：

$$\text{二位數 } ma \times \text{二位數 } mb$$

$$= 10m*(\text{被乘數} + \text{乘數的個位數}) + \text{被乘數的個位數} * \text{乘數的個位數}$$

六、任意兩個二位數相乘

$$\text{二位數 } AB \times \text{二位數 } CD$$

$$A*C*100 + (AD+BC)*10 + BD*1$$

## 陸、結論

從一開始在網路上看到「印度式 1919 乘法」，那神奇的算法使我們深深著迷，我們開始探究其中的原理；在過程中，我們發現了討論的重要、學會追根究柢的精神，明白數學並不是將結論記一記、公式背一背就夠了，需要理解原理，甚至找到規律，數學知識就能內化於心。

完成此次科展，不只提升運算速度，更重要的是我們嘗試去發現、嘗試去推導的過程，我們不再覺得課本教的數學知識只是紙上談兵，而是可以去破解外人看起來很神奇的速算法，內心產生的成就感是筆墨難以形容的！

## 柒、參考資料及其他

- 一、康軒版第三冊
- 二、印度的 1919 乘法 <https://dacota.tw/blog/post/29840788>
- 三、兩位數乘法速算 <https://kknews.cc/zh-tw/education/x5qv9bg.html>