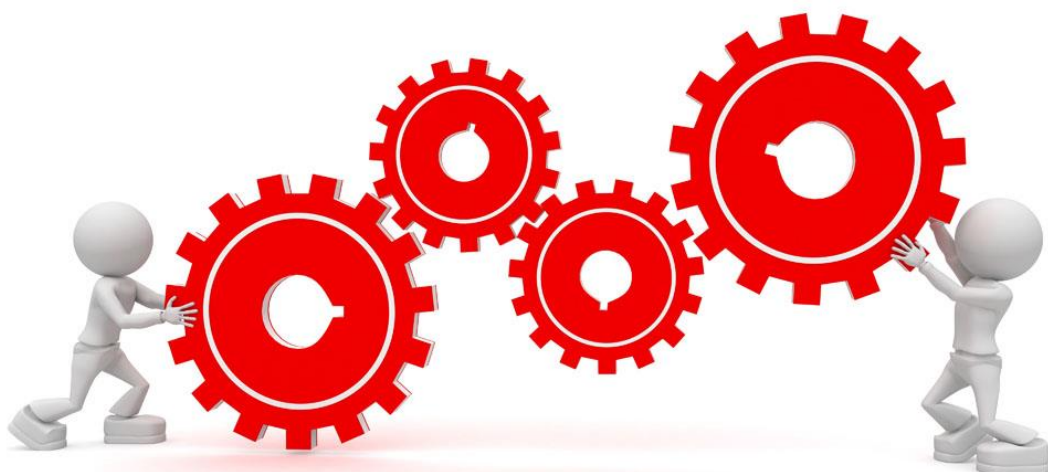


金門地區第五十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

關鍵時刻



科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：關鍵時刻

關 鍵 詞：齒數、圓周、最小公倍數

編 號：

目錄

壹、摘要

.....1

貳、研究動機

.....1

參、研究目的

.....1

肆、研究課備與器材

.....1

伍、研究過程

.....1-7

陸、研究結果

.....7-8

柒、結論

.....8-9

捌、參考資料

.....9

關鍵時刻－齒輪傳動

壹、摘要

有一天，在幫老師整理桌子的時候，不小心把老師的手錶掃到地上，馬上拿起來檢查有沒有壞掉，搖一搖、甩一甩，正擔心老師知道了會生氣時，我們卻意外的發現，手錶不僅沒壞，時針、分針和秒針還是“喀喀”作響，原來裡面有大大小小的齒輪。

貳、研究動機

在日常生活中，我們常利用數學來尋找答案，而時鐘和手錶是利用齒輪的轉動才能使分秒準確。至於每一個齒輪是如何配合的？為了解開疑惑，便找幾位有興趣的同學一同研究。

參、研究目的

- 一.從設計簡單的齒輪中，觀察大小不同齒輪的齒數比以及轉動圈數的關係。
- 二.由目的一的研究結果，來探討時針、分針、秒針所使用的齒輪傳動機制。

肆、研究設備與器材

切割板、紙板、圓規、美工刀。

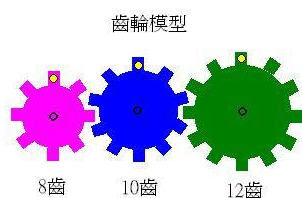
伍、研究過程

一.準備工作：

- (一) 先到圖書館尋找相關資料，如六上的課本、百科全書等，並尋求老師的協助。
- (二) 由二位同學共同製作出三個大小不同的齒輪，大的 12 齒，中的 10 齒，小的 8 齒，且每個齒輪之間必須能夠契合傳動。

二.齒輪製作：

- (一) 先把紙板利用圓規畫出三個大小不同的圓，且三個齒輪必須契合。
- (二) 每個齒輪的每一齒必須大小相同，齒數愈多的齒輪所畫的圓周愈大。



(三) 圓周的計算是 $2\pi \times \text{半徑}$ ，因此齒輪的齒數和半徑成正比。(齒數分別為 8、10、12 的齒輪分別用 8、10、12 公分為半徑畫圓)。

(四) 將圓割下來後再分別延著圓周作 16、20、24 等分，再把其中單數等分，長為 1.5 公分割除，便製成了所要的齒輪了。(如齒輪模型圖)



三.討論與研究：

- (一) 問題一：當兩個大小不同的齒輪契合傳動時，速度是否相同？
 - (二) 問題二：在每個齒輪上在其中一齒作上記號並都朝上，問每個齒輪最少需轉幾圈後而能使記號同時朝上？
 - (三) 問題三：探討時針、分針、秒針所使用的齒輪是如何準確的顯示時間。
- (以上問題暫不考慮旋轉方向)

四.接著使用大家所製作的齒輪開始實驗，並製作成表格以便加以記錄：

(單位：圈)

轉動齒數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8 齒齒輪	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{2}{8}$
10 齒齒輪	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	1
12 齒齒輪	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$

(單位：圈)

轉動 齒數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
8 齒 齒輪	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{4}{8}$	$1\frac{5}{8}$	$1\frac{6}{8}$	$1\frac{7}{8}$	2	$2\frac{1}{8}$	$2\frac{2}{8}$	$2\frac{3}{8}$	$2\frac{4}{8}$
10 齒 齒輪	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{2}{10}$	$1\frac{3}{10}$	$1\frac{4}{10}$	$1\frac{5}{10}$	$1\frac{6}{10}$	$1\frac{7}{10}$	$1\frac{8}{10}$	$1\frac{9}{10}$	2
12 齒 齒輪	$\frac{11}{12}$	1	$1\frac{1}{12}$	$1\frac{2}{12}$	$1\frac{3}{12}$	$1\frac{4}{12}$	$1\frac{5}{12}$	$1\frac{6}{12}$	$1\frac{7}{12}$	$1\frac{8}{12}$

(單位：圈)

轉動 齒數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8 齒 齒輪	$2\frac{5}{8}$	$2\frac{6}{8}$	$2\frac{7}{8}$	3	$3\frac{1}{8}$	$3\frac{2}{8}$	$3\frac{3}{8}$	$3\frac{4}{8}$	$3\frac{5}{8}$	$3\frac{6}{8}$
10 齒 齒輪	$2\frac{1}{10}$	$2\frac{2}{10}$	$2\frac{3}{10}$	$2\frac{4}{10}$	$2\frac{5}{10}$	$2\frac{6}{10}$	$2\frac{7}{10}$	$2\frac{8}{10}$	$2\frac{9}{10}$	3
12 齒 齒輪	$1\frac{9}{12}$	$1\frac{10}{12}$	$1\frac{11}{12}$	2	$2\frac{1}{12}$	$2\frac{2}{12}$	$2\frac{3}{12}$	$2\frac{4}{12}$	$2\frac{5}{12}$	$2\frac{6}{12}$

從上表中，我們觀察到，在轉到齒數是 24 齒時，齒數為 8 的齒輪和齒數為 12 的齒輪的記號都同時朝上，其中齒數為 8 的齒輪轉了 3 圈，齒數為 12 的齒輪轉了 2 圈，而我們發現 8 和 12 的最小公倍數是 24。

(單位：圈)

轉動 齒數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
8 齒 齒輪	$3\frac{7}{8}$	4	$4\frac{1}{8}$	$4\frac{2}{8}$	$4\frac{3}{8}$	$4\frac{4}{8}$	$4\frac{5}{8}$	$4\frac{6}{8}$	$4\frac{7}{8}$	5
10 齒 齒輪	$3\frac{1}{10}$	$3\frac{2}{10}$	$3\frac{3}{10}$	$3\frac{4}{10}$	$3\frac{5}{10}$	$3\frac{6}{10}$	$3\frac{7}{10}$	$3\frac{8}{10}$	$3\frac{9}{10}$	4

12 齒 齒輪	$2\frac{7}{12}$	$2\frac{8}{12}$	$2\frac{9}{12}$	$2\frac{10}{12}$	$2\frac{11}{12}$	3	$3\frac{1}{12}$	$3\frac{2}{12}$	$3\frac{3}{12}$	$3\frac{4}{12}$
------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	------------------	---	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

又轉到齒數是 40 齒時，齒數為 8 的齒輪和齒數為 10 的齒輪的記號都同時朝上，其中齒數為 8 的齒輪轉了 5 圈，齒數為 10 的齒輪轉了 4 圈，而剛好 8 和 10 的最小公倍數是 40。因此我們大膽預估轉到齒數是 48 齒時，齒數為 8 的齒輪和齒數為 12 的齒輪的記號會再次同時朝上，因為 48 是 24 的倍數。又轉到齒數是 60 齒時，齒數為 10 的齒輪和齒數為 12 的齒輪的記號都同時朝上；因為 10 和 12 的最小公倍數是 60。

(單位：圈)

轉動 齒數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
8 齒 齒輪	$5\frac{1}{8}$	$5\frac{2}{8}$	$5\frac{3}{8}$	$5\frac{4}{8}$	$5\frac{5}{8}$	$5\frac{6}{8}$	$5\frac{7}{8}$	6	$6\frac{1}{8}$	$6\frac{2}{8}$
10 齒 齒輪	$4\frac{1}{10}$	$4\frac{2}{10}$	$4\frac{3}{10}$	$4\frac{4}{10}$	$4\frac{5}{10}$	$4\frac{6}{10}$	$4\frac{7}{10}$	$4\frac{8}{10}$	$4\frac{9}{10}$	5
12 齒 齒輪	$3\frac{5}{12}$	$3\frac{6}{12}$	$3\frac{7}{12}$	$3\frac{8}{12}$	$3\frac{9}{12}$	$3\frac{10}{12}$	$3\frac{11}{12}$	4	$4\frac{1}{12}$	$4\frac{2}{12}$

(單位：圈)

轉動 齒數	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
8 齒 齒輪	$6\frac{3}{8}$	$6\frac{4}{8}$	$6\frac{5}{8}$	$6\frac{6}{8}$	$6\frac{7}{8}$	7	$7\frac{1}{8}$	$7\frac{2}{8}$	$7\frac{3}{8}$	$7\frac{4}{8}$
10 齒 齒輪	$5\frac{1}{10}$	$5\frac{2}{10}$	$5\frac{3}{10}$	$5\frac{4}{10}$	$5\frac{5}{10}$	$5\frac{6}{10}$	$5\frac{7}{10}$	$5\frac{8}{10}$	$5\frac{9}{10}$	6
12 齒 齒輪	$4\frac{3}{12}$	$4\frac{4}{12}$	$4\frac{5}{12}$	$4\frac{6}{12}$	$4\frac{7}{12}$	$4\frac{8}{12}$	$4\frac{9}{12}$	$4\frac{10}{12}$	$4\frac{11}{12}$	5

果然轉到齒數是 48 齒時，齒數為 8 的齒輪和齒數為 12 的齒輪記號同時都朝上，而轉到齒數是 60 齒時，齒數為 10 的齒輪和齒數為 12 的齒輪的記號都同時朝上了。預估再轉到齒數是 80 齒時，齒數為 8 的齒輪和齒數為 10 的齒輪的記號都同時朝上。

(單位：圈)

轉動 齒數	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
8 齒 齒輪	$7\frac{5}{8}$	$7\frac{6}{8}$	$7\frac{7}{8}$	8	$8\frac{1}{8}$	$8\frac{2}{8}$	$8\frac{3}{8}$	$8\frac{4}{8}$	$8\frac{5}{8}$	$8\frac{6}{8}$
10 齒 齒輪	$6\frac{1}{10}$	$6\frac{2}{10}$	$6\frac{3}{10}$	$6\frac{4}{10}$	$6\frac{5}{10}$	$6\frac{6}{10}$	$6\frac{7}{10}$	$6\frac{8}{10}$	$6\frac{9}{10}$	7
12 齒 齒輪	$5\frac{1}{12}$	$5\frac{2}{12}$	$5\frac{3}{12}$	$5\frac{4}{12}$	$5\frac{5}{12}$	$5\frac{6}{12}$	$5\frac{7}{12}$	$5\frac{8}{12}$	$5\frac{9}{12}$	$5\frac{10}{12}$

(單位：圈)

轉動 齒數	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
8 齒 齒輪	$8\frac{7}{8}$	9	$9\frac{1}{8}$	$9\frac{2}{8}$	$9\frac{3}{8}$	$9\frac{4}{8}$	$9\frac{5}{8}$	$9\frac{6}{8}$	$9\frac{7}{8}$	10
10 齒 齒輪	$7\frac{1}{10}$	$7\frac{2}{10}$	$7\frac{3}{10}$	$7\frac{4}{10}$	$7\frac{5}{10}$	$7\frac{6}{10}$	$7\frac{7}{10}$	$7\frac{8}{10}$	$7\frac{9}{10}$	8
12 齒 齒輪	$5\frac{11}{12}$	6	$6\frac{1}{12}$	$6\frac{2}{12}$	$6\frac{3}{12}$	$6\frac{4}{12}$	$6\frac{5}{12}$	$6\frac{6}{12}$	$6\frac{7}{12}$	$6\frac{8}{12}$

再預估轉到齒數是 96 齒時，齒數為 8 的齒輪和齒數為 12 的齒輪的記號都同時朝上。

(單位：圈)

轉動 齒數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
8 齒 齒輪	$10\frac{1}{8}$	$10\frac{2}{8}$	$10\frac{3}{8}$	$10\frac{4}{8}$	$10\frac{5}{8}$	$10\frac{6}{8}$	$10\frac{7}{8}$	11	$11\frac{1}{8}$	$11\frac{2}{8}$
10 齒 齒輪	$8\frac{1}{10}$	$8\frac{2}{10}$	$8\frac{3}{10}$	$8\frac{4}{10}$	$8\frac{5}{10}$	$8\frac{6}{10}$	$8\frac{7}{10}$	$8\frac{8}{10}$	$8\frac{9}{10}$	9
12 齒 齒輪	$6\frac{9}{12}$	$6\frac{10}{12}$	$6\frac{11}{12}$	7	$7\frac{1}{12}$	$7\frac{2}{12}$	$7\frac{3}{12}$	$7\frac{4}{12}$	$7\frac{5}{12}$	$7\frac{6}{12}$

(單位：圈)

轉動 齒數	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
8 齒 齒輪	$11\frac{3}{8}$	$11\frac{4}{8}$	$11\frac{5}{8}$	$11\frac{6}{8}$	$11\frac{7}{8}$	12	$12\frac{1}{8}$	$12\frac{2}{8}$	$12\frac{3}{8}$	$12\frac{4}{8}$
10 齒 齒輪	$9\frac{1}{10}$	$9\frac{2}{10}$	$9\frac{3}{10}$	$9\frac{4}{10}$	$9\frac{5}{10}$	$9\frac{6}{10}$	$9\frac{7}{10}$	$9\frac{8}{10}$	$9\frac{9}{10}$	10
12 齒 齒輪	$7\frac{7}{12}$	$7\frac{8}{12}$	$7\frac{9}{12}$	$7\frac{10}{12}$	$7\frac{11}{12}$	8	$8\frac{1}{12}$	$8\frac{2}{12}$	$8\frac{3}{12}$	$8\frac{4}{12}$

(單位：圈)

轉動 齒數	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
8 齒 齒輪	$12\frac{5}{8}$	$12\frac{6}{8}$	$12\frac{7}{8}$	13	$13\frac{1}{8}$	$13\frac{2}{8}$	$13\frac{3}{8}$	$13\frac{4}{8}$	$13\frac{5}{8}$	$13\frac{6}{8}$
10 齒 齒輪	$10\frac{1}{10}$	$10\frac{2}{10}$	$10\frac{3}{10}$	$10\frac{4}{10}$	$10\frac{5}{10}$	$10\frac{6}{10}$	$10\frac{7}{10}$	$10\frac{8}{10}$	$10\frac{9}{10}$	11
12 齒 齒輪	$8\frac{5}{12}$	$8\frac{6}{12}$	$8\frac{7}{12}$	$8\frac{8}{12}$	$8\frac{9}{12}$	$8\frac{10}{12}$	$8\frac{11}{12}$	9	$9\frac{1}{12}$	$9\frac{2}{12}$

(單位：圈)

轉動 齒數	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
8 齒 齒輪	$13\frac{7}{8}$	14	$14\frac{1}{8}$	$14\frac{2}{8}$	$14\frac{3}{8}$	$14\frac{4}{8}$	$14\frac{5}{8}$	$14\frac{6}{8}$	$14\frac{7}{8}$	15
10 齒 齒輪	$11\frac{1}{10}$	$11\frac{2}{10}$	$11\frac{3}{10}$	$11\frac{4}{10}$	$11\frac{5}{10}$	$11\frac{6}{10}$	$11\frac{7}{10}$	$11\frac{8}{10}$	$11\frac{9}{10}$	12
12 齒 齒輪	$9\frac{3}{12}$	$9\frac{4}{12}$	$9\frac{5}{12}$	$9\frac{6}{12}$	$9\frac{7}{12}$	$9\frac{8}{12}$	$9\frac{9}{12}$	$9\frac{10}{12}$	$9\frac{11}{12}$	10

一直轉到齒數是 120 齒時，三個齒輪的記號都同時朝上了，其中齒數為 8 的齒輪轉了 15 圈，齒數為 10 的齒輪轉了 12 圈，齒數為 12 的齒輪轉了 10 圈。而 8、10、12 的最小公倍數是 120。

我們再把以上所紀錄的表格中，將有兩個以上齒輪的記號同時朝上的部分加以整理在同一表格中，以便觀察和印證齒輪的齒數和圈數的關係：

(單位：圈)

轉動齒數	24	40	48	60	72	80	96	120
8 齒齒輪	3	5	6	$7\frac{4}{8}$	9	10	12	15
10 齒齒輪	$2\frac{4}{10}$	4	$4\frac{8}{10}$	6	$7\frac{2}{10}$	8	$9\frac{6}{10}$	12
12 齒齒輪	2	$3\frac{4}{12}$	4	5	6	$6\frac{8}{12}$	8	10



陸、研究結果

一、將大家實驗的結果，加以整理，並列出一份報告。

(一) 問題一解：兩個齒輪契合傳動時，大齒輪轉動一齒時，小齒輪也轉動一齒，因此就此觀點而言，輪齒（等於圓周）移動速度是相同的。而齒輪的齒數與圓周成正比，因此大、小齒輪的轉速比等於齒數比的反比；因此，就轉速而言，小齒輪轉速比大齒輪轉速快。

(二) 問題二解：即是在求得三個齒輪齒數的最小公倍數，再分別除以每個齒輪的

齒數，便能算出每個齒輪應有的最少轉數。當齒數為 8 的齒輪向右轉一齒，即轉 $1/8$ 圈時，齒數為 10 的齒輪向左轉一齒，即轉 $1/10$ 圈，同時齒數為 12 的齒輪向右轉一齒，即轉 $1/12$ 圈。因此要使三個齒輪上的記號都同時朝上所需的最少圈數，其計算如下：

$$8、10、12 \text{ 的最小公倍數} = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120 \text{ (齒數)}$$

$$120 \div 8 = 15 \text{ (圈)}$$

$$120 \div 10 = 12 \text{ (圈)}$$

$$120 \div 12 = 10 \text{ (圈)}$$

所以齒數 8、10、12 的齒輪最少分別需轉 15、12 及 10 圈，才能使記號同時朝上。並可推算下次能使記號同時朝上是 120 的整數倍。因此，若考慮數個不同齒數的齒輪，依相同的實驗方法，都是求這些不同齒數的最小公倍數之後，再分別除以齒數，即得到它們應旋轉的圈數。

(三) 問題三解：由(二)問題二解得知，若要使三個齒數不同的齒輪，同時由原點出發，再同時回到原點，所需的轉動齒數等於三個齒輪齒數的最小公倍數；以此推算時鐘上的時針、分針、秒針同時由 12 點出發，再同時回到 12 點所需的秒數等於時針、分針、秒針各繞一圈所需秒數的最小公倍數。我們都知道，1 小時等於 60 分鐘，而 1 分鐘等於 60 秒；又時鐘上的時針是每 12 小時繞一圈，分針是每 60 分鐘繞一圈，秒針是每 60 秒鐘繞一圈。時針繞一圈需 $60 \times 60 \times 12 = 43200$ 秒(齒)，分針繞一圈需 $60 \times 60 = 3600$ 秒(齒)，秒針繞一圈需 60 秒(齒)。43200、3600、60 的最小公倍數是 43200，即每 43200 秒，時針、分針、秒針同時回到 12 點。

柒、結論

由以上探討的結果，在不考慮旋轉方向之下，我們可以知道要使三個齒數不同的齒輪，同時由原點出發，再同時回到原點，所需的轉動齒數等於三個齒輪齒數的最小公倍數；若只考慮傳動機制的齒輪齒數比而不考慮其它因素之下，時鐘和手錶的時針、分針和秒針為何會配合轉動，就是運用齒數比 43200：3600：60 傳動機制的齒輪組合而成的，

且每 43200 秒，時針、分針、秒針同時回到 12 點。

我們已經探討出時鐘內的時針、分針、秒針所使用的齒輪是如何準確的顯示時間。但是我們所看到在時鐘內的齒輪有的是上下疊合而成的，因此其中更細微和複雜的問題，〈如：時鐘內的大小齒輪要如何組合才能使時間精確？除了齒輪之外還有其它時鐘裡的零件是怎麼排列配合的？〉這些問題有待將來加以探究。

這次的數學科展會成功的完成，是由於同學間互助合作、共同努力和老師的指導才獲得的結果。我們從過程中得到了許多的知識，由齒輪的問題更知道數學與我們的日常生活有極密切的關係，只要多多注意身邊的事物就可以發現數學的問題，那是十分有趣的。

捌、參考資料

一.中華兒童百科全書

二.康軒國小數學課本第十一冊第一單元〈最大公因數與最小公倍數〉、第五單元〈圓周率〉