

「磚」飾園地妙趣知多少

壹、摘要：

藉由日常生活中遇到有關「形狀」的問題，進行探討研究，由過程中發現有趣的問題、培養思考解決問題的能力、提高學習數學的興趣，進而喜歡數學，接近數學，而不排斥數學。

貳、研究動機：

學校新建的教學大樓，蓋得美輪美奐。新教室的空間比舊教室寬廣，裡面規劃了各種學習角落區，其中一區還鋪上了木質地板，讓我們可以在上面或坐或躺，隨心所欲做自己愛做的事情。長方形的木板，鋪在地板上就像長方格子布。突然我想到：如果改用三角形、四邊形、多邊形、圓形或其他形狀鋪起來的地板，一定更多樣化、更美麗，於是我和同學跟老師討論後，決定動手設計排列。更由地磚的設計排列，引起我們去研究多面體及堆體積的問題。

參、研究目的：

- 一、了解平面三邊形能否緊密鋪成地板？
- 二、了解平面四邊形能否緊密鋪成地板？
- 三、了解平面多邊形能否緊密鋪成地板？
- 四、設計有趣的地磚圖案。
- 五、研究三邊形、四邊形、多邊形可以組成哪些立體形狀。
- 六、研究哪些立體的物體可以緊密的堆在一起。
- 七、在日常生活中的應用。

肆、研究設備器材：

尺、圓規、量角器、雲彩紙、西卡紙、圖畫紙、膠帶、剪刀、美工刀。

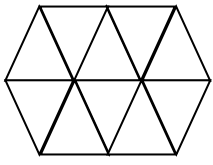
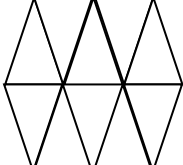
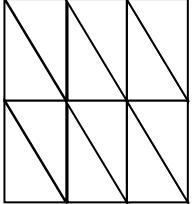
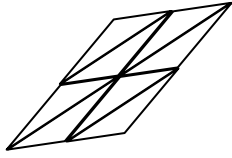
伍、研究過程：

- 一、了解三邊形能否緊密鋪成地板？

(一) 做法：

1. 用雲彩紙畫出正三角形、等腰三角形、直角三角形、鈍角三角形並剪下來。
2. 用剪下來的正三角形、等腰三角形、直角三角形、鈍角三角形排排看。

(二) 結果：

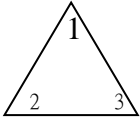
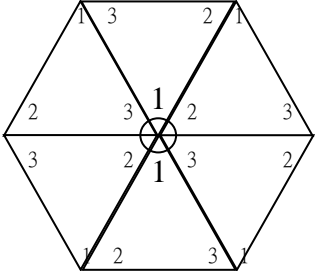
正三角形	等腰三角形	直角三角形	鈍角三角形
			

(三) 討論：

1. 一個三角形的內角和為 180 度，二個三角形的內角和為 360 度，連續用六個全等的

三角形緊鄰著排列（非正三角形相同度數的角要相對），正好可以將頂點所形成的圓心角排滿，所以三角形的地磚都可以緊密的鋪成地板。

2.如下圖：

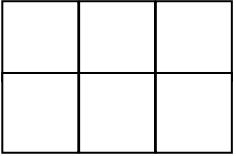
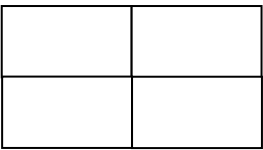
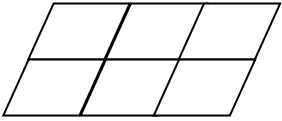
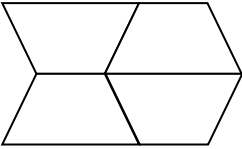
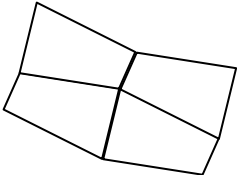

	$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180 \text{ 度}$
	$\begin{aligned} &\angle 1 \times 2 + \angle 2 \times 2 + \angle 3 \times 2 \\ &= (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) \times 2 \\ &= 360 \text{ 度} \end{aligned}$

二、了解四邊形能否緊密鋪成地板？

(一) 做法：

- 1.用雲彩紙畫出正方形、長方形、平行四邊形、梯形、任意四邊形並剪下來。
- 2.用剪下來的正方形、長方形、平行四邊形、梯形、任意四邊形排排看。

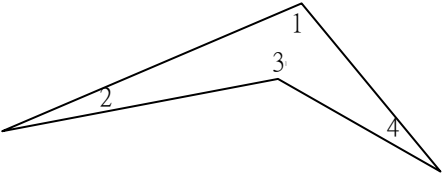
(二) 結果：

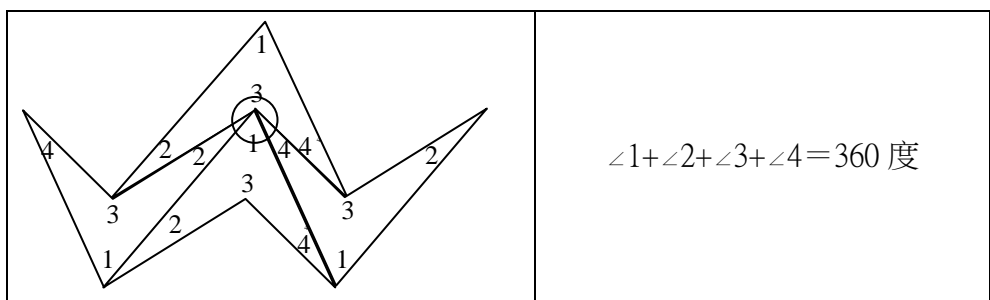
正方形	長方形	平行四邊形
		
梯形	任意四邊形	任意四邊形
		

(三) 討論：

- 1.一個四邊形的內角和為 360 度，我們只要將四邊形的四個角排在一起，正好是 360 度，也就可以將四邊形的頂點所成的圓心角排滿，所以四邊形的地磚都可以緊密的鋪成地板。

2.如下圖

	$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360 \text{ 度}$
---	---

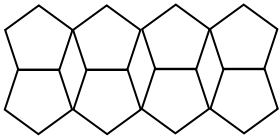
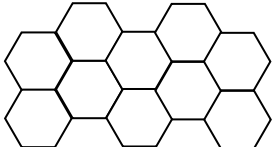
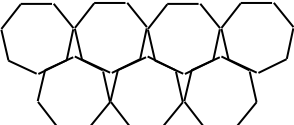
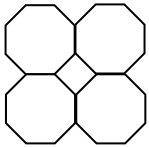
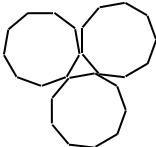
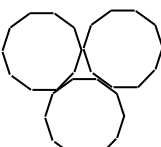
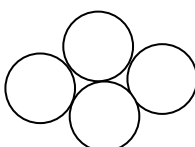


三、了解多邊形能否緊密鋪成地板？

(一) 做法：

1. 用雲彩紙畫出正五邊形、正六邊形、正七邊形、正八邊形、正九邊形、正十邊形、圓形並剪下來。
2. 用剪下來的正五邊形、正六邊形、正七邊形、正八邊形、正九邊形、正十邊形、圓形排排看。

(二) 結果：

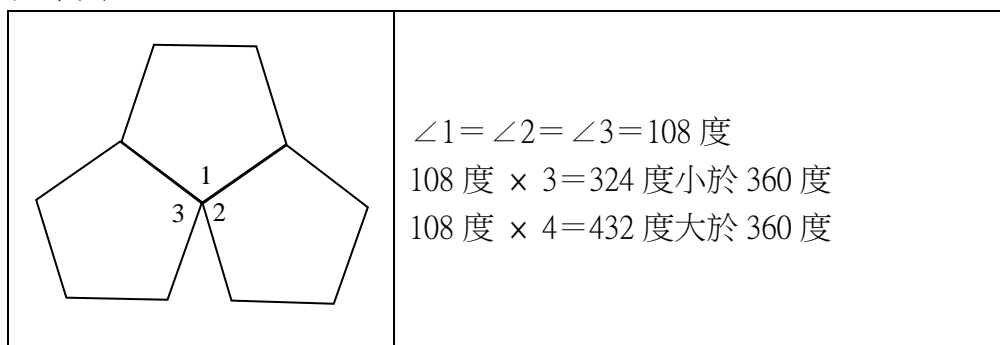
正五邊形		正六邊形		正七邊形			
							
正八邊形		正九邊形		正十邊形		圓形	
							

(三) 討論：

1. 正五邊形：

(1) 正五邊形各角為 108 度，將三個正五邊形緊臨排在一起（如下圖），它的三個角和為 324 度小於 360 度，他的四個角和為 432 度大於 360 度，所以正五邊形不能排成緊密的地磚。

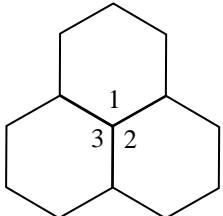
(2) 如下圖：



2.正六邊形：

(1) 正六邊形各角為 120 度，三個角和為 360 度，若把三個正六邊形的角排在一起，正好可以將頂點所成的圓心角排滿，所以正六邊形可以排成緊密的地磚。

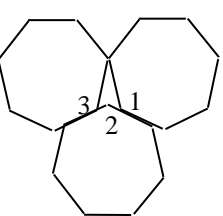
(2) 如下圖

	$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 120 \text{ 度}$ $120 \text{ 度} \times 3 = 360 \text{ 度}$
---	--

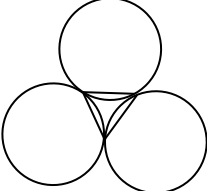
3.正七邊形

(1) 正七邊形各角度為 128.6 度，兩個角的度數和小於 360 度，而三個角的度數和大於 360 度，所以不能排成緊密的地磚。

(2) 如下圖

	$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 128.6 \text{ 度}$ $128.6 \text{ 度} \times 2 = 257.2 \text{ 度}$ 小於 360 度 $128.6 \text{ 度} \times 3 = 385.8 \text{ 度}$ 大於 360 度
--	--

4.正八邊形、正九邊形、正十邊形和圓形均不能排成緊密的地磚。

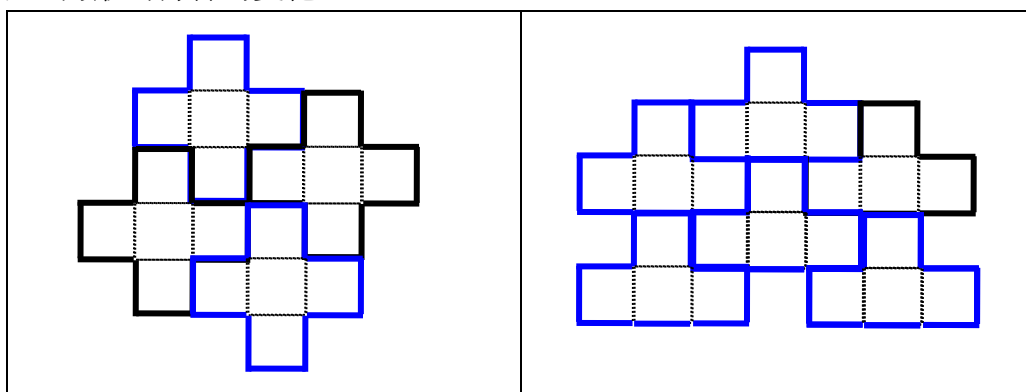
<p>正八邊形</p>	<p>每個內角為 135 度 $135 \text{ 度} \times 2 = 270 \text{ 度}$ 小於 360 度 $135 \text{ 度} \times 3 = 405 \text{ 度}$ 大於 360 度</p>
<p>正九邊形</p>	<p>每個內角為 140 度 $140 \text{ 度} \times 2 = 280 \text{ 度}$ 小於 360 度 $140 \text{ 度} \times 3 = 420 \text{ 度}$ 大於 360 度</p>
<p>正十邊形</p>	<p>每個內角為 144 度 $144 \text{ 度} \times 2 = 288 \text{ 度}$ 小於 360 度 $144 \text{ 度} \times 3 = 432 \text{ 度}$ 大於 360 度</p>
	<p>三個圓形拼在一起，會有三個接觸點，將接觸點連起來，形成一個三角形。三角形的內角和為 180 度，小於 360 度，所以圓形不能緊密的鋪成地板（如左圖）。</p>

四、設計有趣的地磚圖案

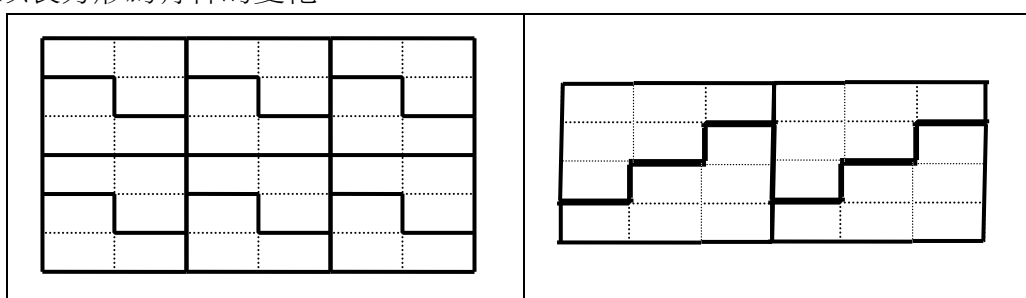
三角形、四邊形、正六邊形的地磚皆可緊密的鋪成地板，所以正三角形、正方形、長方形、平行四邊形、正六邊形是構成地磚最基本的形狀。我們可以用正三角形、正

方形、長方形、平行四邊形、正六邊形為骨幹，設計變化奇妙的地磚圖案。

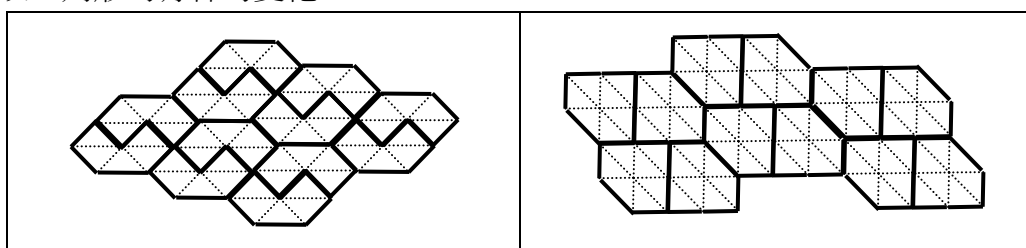
(一) 以正方形為骨幹的變化



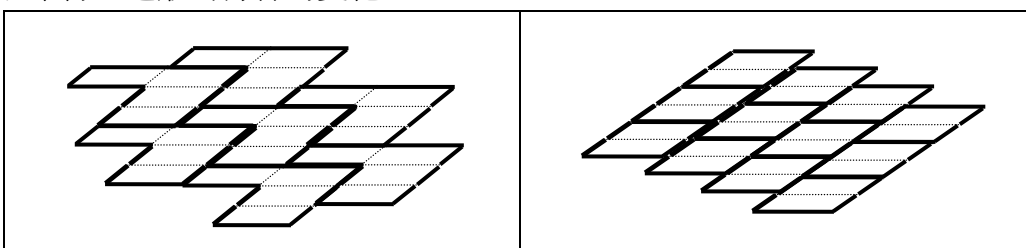
(二) 以長方形為骨幹的變化



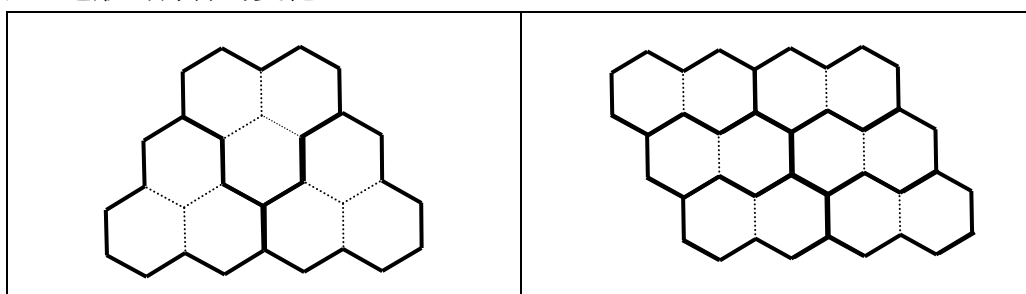
(三) 以三角形為骨幹的變化



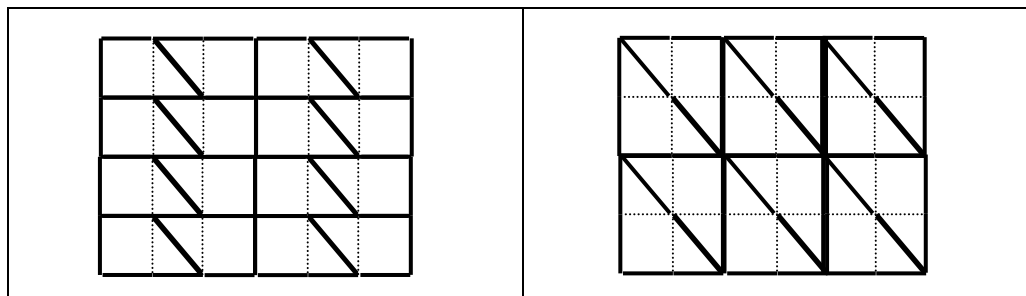
(四) 以平行四邊形為骨幹的變化



(五) 以六邊形為骨幹的變化



(六) 以正方形和三角形為骨幹的變化

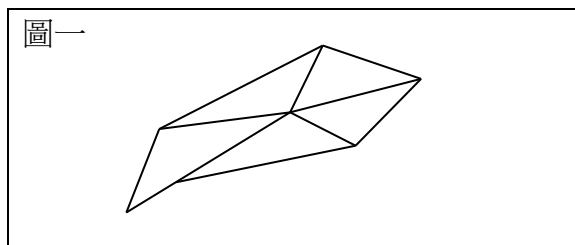


五、研究三邊形、四邊形、多邊形可以組成哪些立體的形狀。

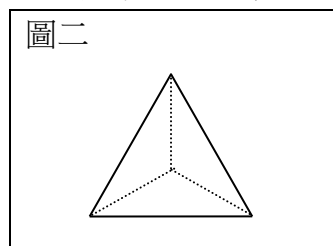
(一) 三邊形

1.做法：

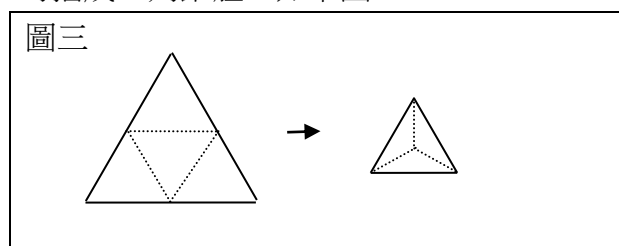
- (1) 非正三角形：用西卡紙畫出等腰三角形、直角三角形、鈍角三角形並剪下來組合在一起。如下圖一



- (2) 正三角形：用西卡紙畫出正三角形剪下來組合在一起。如下圖二。



- (3) 用西卡紙畫出一個正三角形並剪下，找出每邊的中心點，再將中心點連起來，可摺成三角錐體。如下圖三



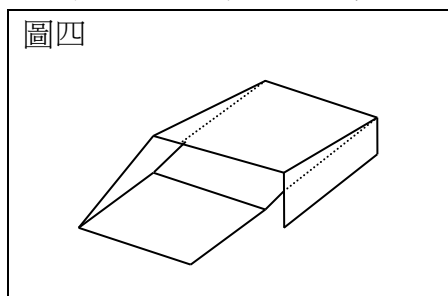
2.討論：

- (1) 非正三角形不能組合成立體的形狀。
- (2) 正三角形可組合成正四面體（三角錐），每個頂點有三個面相交。
- (3) 正三角形每邊的中心點連線可摺成三角錐體。

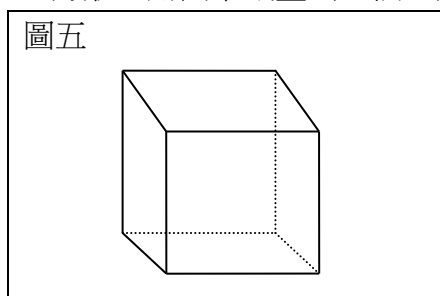
(二) 四邊形

1.做法：

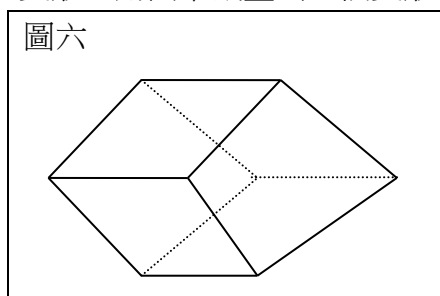
(1) 不等長的四邊形：用西卡紙畫出六個不等長的四邊形，剪下組合。如下圖四。



(2) 正方形：用西卡紙畫出六個正方形，剪下組合。如下圖五。



(3) 菱形：用西卡紙畫出六個菱形，剪下組合。如下圖六。

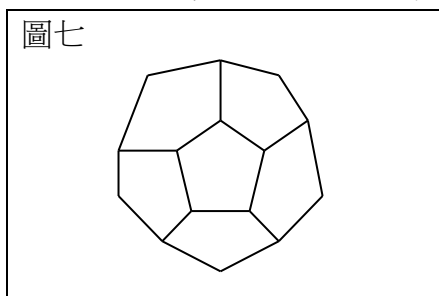


2.討論：

- (1) 不等長的四邊形不能組成立體的形狀。
- (2) 正方形可以組成正六面體，也就是正立方體，每個頂點有三個面相交。
- (3) 菱形可以組成正六面體，形狀歪斜，每個頂點有三個面相交。

(三) 正五邊形

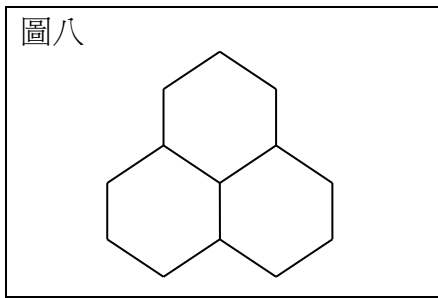
1.做法：用西卡紙畫出正五邊形，剪下組合。如下圖七



2.討論：正五邊形可以組成正十二面體，每個頂點有三個面相交。

(四) 正六邊形：

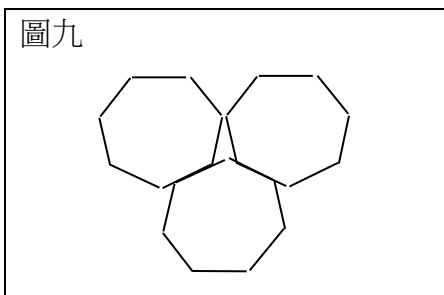
1.用西卡紙畫出正六邊形，剪下組合。如下圖八。



2.討論：正六邊形各角為 120 度，若將三個角拼在一起，三角度和為 360 度就成平面，所以正六邊形不能組合成立體。

(五) 正七邊形：

1.用西卡紙畫出正七邊形，剪下組合。如下圖九



2.討論：正七邊形各角為 128.6 度，若將三個角拼在一起，三角度和大於 360 度，所以正七邊形不能組合成立體。

(六) 歸納結果與分析原因

1.歸納結果如下表

可組合成 立體形狀	正三角形、菱形、正方形、正五邊形
不可組合成 立體形狀	邊長不等的三角形、邊長不等的四邊形、多邊形、正六邊形、正七邊形……

2.由結果可看出，每個頂點最少需要有三個面相交，才能組成立體的形狀。

3.正方形的四個角平放拼在一起，四個內角和為 360 度即成平面，所以正方形要拼成立體的圖形，只有每個頂點有三個面相交一種拼法（如圖五）；菱形（如圖六）道理相同。

4.正五邊形各角為 108 度，若將三個角拼在一起時還小於 360 度，所以正五邊形可以在每個頂點接三個面，而成為正十二面體（如圖七）。

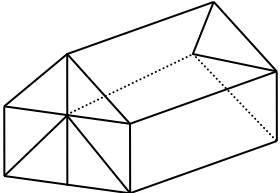
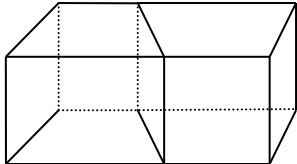
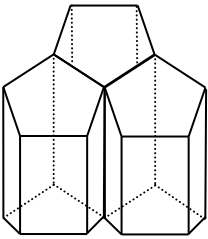
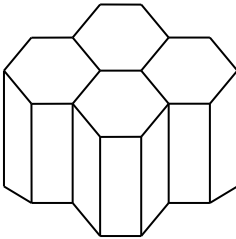
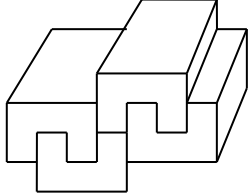
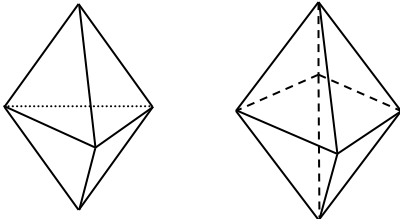
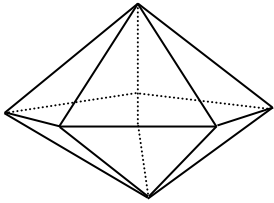
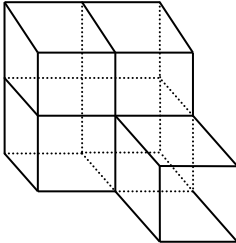
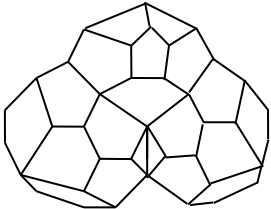
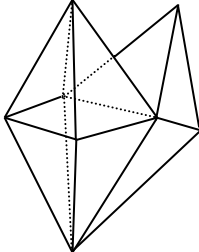
5.正六邊形各角為 120 度，若將三個角拼在一起，內角和為 360 度即成平面，所以正六邊形不能組合成立體（如圖八）。

6.正七邊形（如圖九）、正八邊形、正九邊形、正十邊形、圓形……都不能組合成立體。

六、研究哪些立體的物體可以緊密的堆疊在一起

(一) 做法：用西卡紙做出各種角柱與多面體堆堆看

(二) 結果：如下表

<p>1.三角柱（圖十）</p> 	<p>2.四角柱（圖十一）</p> 
<p>3.五角柱（圖十二）</p> 	<p>4.六角柱（圖十三）</p> 
<p>5.多角柱（圖十四）</p> 	<p>6.四面體 （圖十五） （圖十六）</p> 
<p>7.正四面體（圖十七）</p> 	<p>8.六面體（正立方體）（圖十八）</p> 
<p>9.十二面體（圖十九）</p> 	<p>10.八面體（圖二十）</p> 

(三) 討論：

1.歸納結果

可緊密堆積	三角柱、四角柱、六角柱、多角柱、正四面體、四面體、正六面體、正十二面體
不可緊密堆積	五角柱、八面體

2.三角形、四邊形、正六邊形的地磚，可以緊密的鋪成地磚，所以三角柱、四角柱、正六角柱都可以緊密的堆疊在一起。

3.可以拼成地板的形狀，所做的角柱也可以緊密的堆疊在一起。

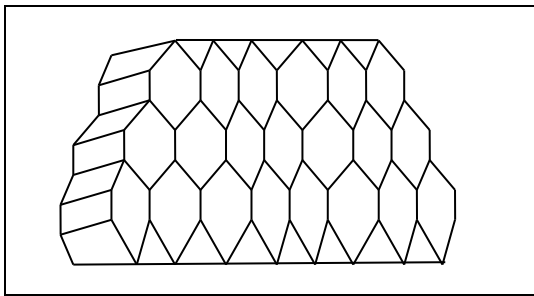
4.正多面體中有正四面體（圖十七）、正六面體（圖十八）、正十二面體（圖十九）可以緊密的堆疊在一起。

5.正四面體可以堆積成正十面體。（圖十七）

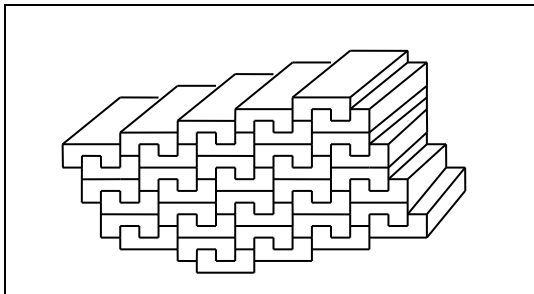
6.四面體可堆成六面體（兩個三角錐上下堆疊，圖十五）和八面體（兩個四角錐上下堆疊，圖十六）。

七、在生活中的應用

(一) 用六角柱做圍牆

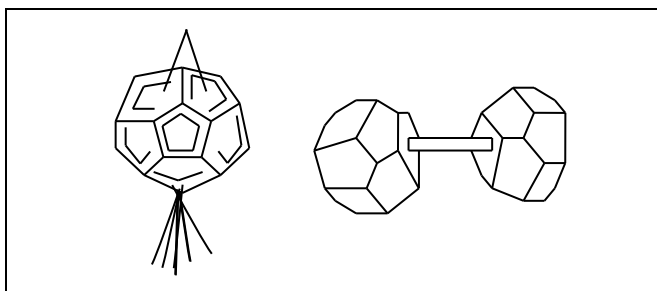


(二) 用多角柱做護坡

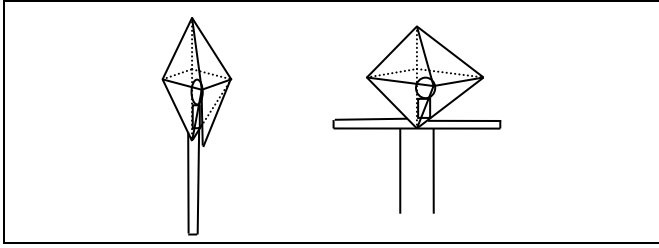


(三) 製作小玩具

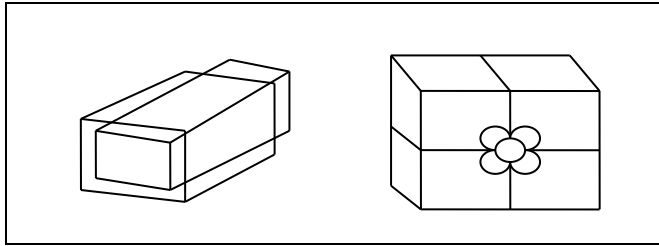
1.利用正十二面體做成可愛的彩球、啞鈴。（如下圖）



2.利用正八面體做成古董玩一關刀燈、路燈。(如下圖)



3.利用六面體做成實用的照相機、變幻盒。(如下圖)





















陸、結論：

- 一、要緊密的鋪成平面地板，各種形狀緊鄰相接排列的各個角度和需為 360 度。
- 二、任何一種三角形、四邊形及六邊形的地磚都可以緊密的鋪成地板。
- 三、一個三角形的內角和為 180 度，連續用六個全等的三角形緊鄰著排列（相同度數的角相對），正好可以將頂點所成的圓心角排滿，所以三角形的地磚都可以緊密的鋪成地板。
- 四、一個四邊形的內角和為 360 度，將四邊形的四個內角排一起，就可以緊密的鋪成地板。
- 五、三個六邊形緊鄰排列在一起，內角和為 360 度，就可以緊密的鋪成地板。
- 六、三角形、四邊形、正六邊形是設計地磚的骨幹。
- 七、要做成立體的物體時，每個頂點至少需要三個面相交。
- 八、要做成立體的物體時，每個頂點所接的面的角度和須小於 360 度。
- 九、不是等邊的三角形、四邊形、五邊形是不能作成立體的物體。
- 十、每個頂點有三個正三角形相交，可以做成四面體（正三角錐，如圖二）。
- 十一、正三角形每邊的中心點連線可摺成三角錐體（圖三）。
- 十二、每個頂點有三個三角形相交的四面體（三角錐），用兩個三角錐上下堆疊可以組合成六面體（圖十五）。
- 十三、每個頂點有三個正三角形相交的四面體（正三角錐），左右互相堆疊可以組合成十面體（圖十七）。
- 十四、每個頂點有四個三角形相交的四面體（四角錐），用兩個四角錐上下堆疊可以組合成八面體（圖十六）。
- 十五、每個頂點有五個三角形相交的五面體（五角錐），兩個上下堆疊可以做成正十面體。
- 十六、每個頂點有三個正方形相交，可以做成正六面體即正立方體（圖五）。
- 十七、每個頂點有三個正五邊形相交，可以做成正十二面體（圓球體，圖七）。
- 十八、三角柱、四角柱、六角柱可以緊密的堆積在一起。
- 十九、可以拼成地板的形狀，所做成的角柱，可以緊密的堆積在一起。
- 二十、正多面體中有正四面體、正六面體、正十二面體可以緊密堆疊在一起。
- 二十一、利用多面體可以做成彩球、啞鈴、關刀燈籠、路燈、照相機、變換盒等東西。

二十二、在日常生活中可利用六角柱做圍牆，多角柱做成護坡等等。

柒、作品相片

		
長方形的地磚	正方形的地磚	長方形與三角形的地磚
		
正方形拼圖	正六邊形拼圖	三角形拼圖
		
將三角形拼成四面體	將三角形拼成六面體	動手拼各種立體圖形
		
四面體與五面體	六面體	四面體與五面體的堆疊
		
正四面體的堆疊	三角形做成的圓球體	五邊形、六邊形的圓球體
		
五邊形圓球體的堆疊	美麗的彩球	各種不同的形體

捌、參考資料：

- (一) 國民小學數學第 9、10、11、12 冊圖形序列、四邊形等、柱體、錐體。
- (二) 拜訪水泥師傅請教常用鋪磚方式，如何設計鋪設有變化的地磚，並請提供相關的資訊供參考。