# 金門地區第 57 屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：誰是猴子王

關 鍵 詞：數列、連續整數、先手必勝

編　　號：

# 摘要

本研究只在研究連續整數的不同排列方式，如何取得最大數字和，在第一種遊戲中，發現了數字排列位置的奇偶性，第二種則進一步透過奇偶性發展至奇偶位和為致勝關鍵，第三種進展至矩形排列，發現取大數原則及奇偶位和並用的方法，第四種則漸漸地可以由前面的研究推展出不敗原則。

## 壹、研究動機

最近上課教到了有關數列的單元，於是我們突發奇想，是否能將這枯燥乏味的數字排列，變成有趣的數學遊戲，遊戲設定為：先手挑戰猴、後手原先猴子王、數字:香蕉（每箱香蕉內的數量不同），挑戰猴取得的香蕉必須大於原先猴子王的香蕉數量，則挑戰猴即可稱王。

## 貳、研究目的

一、遊戲 A：

(一) 遊戲規則：

1. 如圖，給定一排數列，其中數字（1、2、…、10）為隨意排列。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |

2. 其中以『10 根香蕉箱』為目標，玩家只能從最左方的箱子（$a_1$）或最右方的箱子（$a_{10}$）依序輪流拿取（方向不限定只能都由左方或右方），但不可跳著先取在中間的箱子，最後先拿到目標箱子的猴子勝。

(二) 探討問題：

1. 固定或不固定方向是否會影響結果？
2. 先手是否一定會取得目標？

二、遊戲 B：

(一) 遊戲規則：

1. 如圖，給定一排數列，其中數字（1、2、…、10）為隨意排列。

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

2. 玩家只能從最左方的箱子（$a_1$）或最右方的箱子（$a_{10}$）依序輪流拿取（方向不限定只能都由左方或右方），但不可跳著先取在中間的箱子，最後加總香蕉數量最多的猴子勝。

(二) 探討問題：

1. 先手是否必勝？
2. 若先手是一定會勝利，那策略是什麼？

三、遊戲 C：

(一) 遊戲規則：

1. 如圖，給定二排數列，其中數字（1、2、…、6）為隨意排列。

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |

2. 同遊戲 A 的取法，只能由每列的左右兩側開始取。
3. 遊戲 C 的起始方式有四種（$a_1$、$a_3$、$a_4$、$a_6$）可選擇，但不可跳著先取在中間的箱子，最後加總香蕉數量最多的猴子勝。

(二) 探討問題：

1. 『6 根香蕉箱』擺放的位置是否會影響獲勝者？
2. 若先手是一定會勝利，那策略是什麼？

四、遊戲 D：

(一) 遊戲規則：

1. 如圖，給定二排數列，其中數字（1、2、…、8）為隨意排列。

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |

2. 同遊戲 A 的取法，只能由每列的左右兩側開始取。
3. 遊戲 D 的起始方式有四種（$a_1$、$a_4$、$a_5$、$a_8$）可選擇，但不可跳著先取在中間的箱子，最後加總香蕉數量最多的猴子勝。

(二) 探討問題：

1. 『8 根香蕉箱』擺放的位置是否會影響獲勝者？

2. 若先手是一定會勝利，那策略是什麼？

參、研究設備及器材：紙、筆、1~10 紙片

肆、研究過程

一、首先我們將『10 根香蕉箱』放在奇數位、偶數位上，並嘗試進行遊戲。

奇數位：$a_1$、$a_3$、$a_5$、$a_7$、$a_9$。

偶數位：$a_2$、$a_4$、$a_6$、$a_8$、$a_{10}$。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |

(一) 先手取$a_1$的前提下，必可取得剩下的奇數位$a_3$、$a_5$、$a_7$、$a_9$。

(二) 先手取$a_{10}$的前提下，必可取得剩下的偶數位$a_2$、$a_4$、$a_6$、$a_8$。

(三) 雖然先手取箱的方式相當多元，也就是說先手不見得在取$a_1$的前提下需要繼續取奇數位箱子，先手也可以去搶偶數位箱子。

(四) 在雙方都相當熟稔遊戲的情況下，固定方向是否確實會影響遊戲結果。策略就決定於『10 根香蕉箱』位於奇數位或是偶數位上。

(五) 其次，在不固定方向的取法下，先手必然選擇與『10 根香蕉箱』相同的奇數位或是偶數位起始箱即可獲勝。

二、由前一個探討問題得知，先手必然可以取得所有的奇數位箱子或是偶數位箱子，因此在這個遊戲規則下先手只要先行計算『奇數位箱子香蕉總和』以及『偶數位箱子香蕉總和』，就能決定採取哪一種取箱方式。得『先手必勝』。值得注意的是，這跟我們一開始想像中『取大數字策略』不大相同，『取大數字策略』還是會出現落敗的狀況。

三、從這項探討問題開始進行遊戲棋盤的變化，但這項變化遠比我們預期的複雜了許多。

(一) 在多次遊戲後，我們發現幾乎採取『取大數字策略』先手都能取得勝利。但為了

探討，我們決定列下所有的棋盤格式並逐一探討是否符合我們的理論。其次我們也試著尋找這樣的二排數列棋盤是否也存在著奇數位以及偶數位策略。

(二) 首先我們先列出所有的棋盤格式，共計 90 種。如一開始遊戲的狀況，我們發現大多數的棋盤格式都採取『取大數字策略』便可獲勝。但終究出現了反例：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 1 5 | 4 2 5 | 1 4 3 | 2 4 5 | 2 5 4 | 2 5 3 | 1 4 5 | 2 4 3 | 1 5 4 | 3 5 4 | 1 5 3 |
| 2 6 3 | 1 6 3 | 2 6 5 | 1 6 3 | 1 6 3 | 1 6 4 | 2 6 3 | 1 6 5 | 2 6 3 | 1 6 2 | 2 6 4 |

1. 我們發現這一類的棋盤格式都有個特色，那就是『5 根香蕉箱』或『6 根香蕉箱』會位於棋盤正中央（$a_2$、$a_5$）。
2. 另一個歸納的特點是：獲勝時，幾乎都有取得『6 根香蕉箱』。
3. 針對上一點的反例也出現，確實也有未取得『6 根香蕉箱』才獲勝的棋盤格式。

(三) 於是我們除了窮舉法列出所有的棋盤格式並完成歸納後，再提出另一種分析模式。

1. 將二排棋盤化簡為下圖，相當明顯地先手採取『取大數字策略』便可獲勝。由於$a_1$、$a_2$裝載的香蕉數分別為 1、2，所以不會有和局的狀況。

| |
|---|
| $a_1$ |
| $a_2$ |

2. 將二排棋盤推廣為下圖，雖然此時依然是二排棋盤。由於$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$裝載的香蕉數分別為 1、2、3、4，所以有可能會有和局的狀況（一方取 1、4 另一方取 2、3）。

| | |
|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ |
| $a_3$ | $a_4$ |

(1) 但由於$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$都位於邊緣，所以雙方都可以直接取箱。於是先手採取『取大數字策略』便可獲勝。

(2) 而$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$內分別裝載的香蕉數是 1、2、3、4，也就是說先手

必然會取 4、2 而後手只能取 3、1，也就是先手必勝。

3. 將二排棋盤變化為下圖，此時只有$a_1$、$a_2$、$a_4$位於邊緣，雙方採取的策略就明顯不同了。我們使用樹枝圖來探討這個部分。

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$ | | |
| $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |

(1) 先$a_1$後$a_2$先$a_3$後$a_4$、先$a_1$後$a_2$先$a_4$後$a_3$、
先$a_1$後$a_4$先$a_2$後$a_3$、先$a_1$後$a_4$先$a_3$後$a_2$、
先$a_2$後$a_1$先$a_3$後$a_4$、先$a_2$後$a_1$先$a_4$後$a_3$、
先$a_2$後$a_3$先$a_1$後$a_4$、先$a_2$後$a_3$先$a_4$後$a_1$、
先$a_2$後$a_4$先$a_1$後$a_3$、先$a_2$後$a_4$先$a_3$後$a_1$、
先$a_4$後$a_1$先$a_2$後$a_3$、先$a_4$後$a_1$先$a_3$後$a_2$、
先$a_4$後$a_2$先$a_1$後$a_3$、先$a_4$後$a_2$先$a_3$後$a_1$、
先$a_4$後$a_3$先$a_1$後$a_2$、先$a_4$後$a_3$先$a_2$後$a_1$。

(2) 歸納這 16 項我們得到，先手必定能選到的組合只有以下兩種選項：（$a_1$、$a_3$）或（$a_2$、$a_4$）。

(3) 配合前一項討論我們可以得知這樣的棋盤格式下，是有機會被迫出現和局的，如下圖。

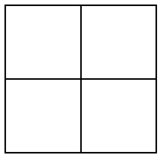
| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | 4 | 3 |

4. 將二排棋盤推廣為下圖，此時只有$a_1$、$a_3$、$a_4$、$a_6$位於邊緣。由於$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$、$a_6$裝載的香蕉數分別為 1、2、3、4、5、6，所以不可能會有和局的狀況。我們使用樹枝圖再配合上面的結論來探討這個部分。

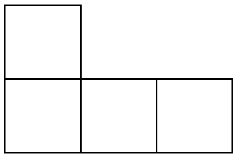
| | | |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |

(1) 先$a_1$後$a_4$、先$a_1$後$a_6$、先$a_3$後$a_4$、先$a_3$後$a_6$、先$a_4$後$a_1$、先$a_4$後$a_3$、

先$a_6$後$a_1$、先$a_6$後$a_3$，棋盤變為：



(2) 先$a_1$後$a_3$、先$a_3$後$a_1$、先$a_4$後$a_6$、先$a_6$後$a_4$，棋盤變為：



(3) 由於田字棋盤可由『取大數字策略』得勝，所以(1)的情況下，若『6 根香蕉箱』出現在$a_1$、$a_3$、$a_4$、$a_6$,則先手第一手必大於後手第一手，在『田字棋盤策略』下，先手必定勝利。

(4) 相反來說(1)的情況下，若『6 根香蕉箱』出現$a_2$、$a_5$時，可能會出現先手選走$a_1$、$a_3$、$a_4$、$a_6$『取大數字策略』但後手選走出現$a_2$、$a_5$的『6 根香蕉箱』，造成凸字棋盤發生。恰好凸字棋盤的兩組又一樣大，這時後手反而會取得勝利。也就是我們窮舉時發現的這個例子。

(四) 綜合以上歸納，我們可以給出結論。

1. 由於$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$、$a_6$裝載的香蕉數分別為 1、2、3、4、5、6，也就是說$\frac{1+2+3+4+5+6}{2}=10.5$，只要累積取得 11 根香蕉即可勝利。

2. 大於等於 11 根香蕉的組合有以下 9 種。

(1) （6、5、4）、（6、5、3）、（6、5、2）、（6、5、1）

(2) （6、4、2）、（6、4、3）

(3) （6、3、2）

(4) （5、4、3）、（5、4、2）

3. 確實會出現未取得『6 根香蕉箱』的棋盤格式。

4. 所以此種棋盤得勝策略應該是將（$a_1$、$a_3$、$a_5$）分為同一組、（$a_2$、$a_4$、$a_6$）分為同一組，先手計算香蕉總和後再應戰。

四、有了二排六箱的棋盤格式後，我們用相同的方式來處理二排八箱的遊戲格式。

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |

(一) 從先手的起始選擇開始分類，先手可以有$a_1$、$a_4$、$a_5$、$a_8$四種選擇。我們仍先以『取大數字策略』當作一般選擇的基礎。我們使用樹枝圖再配合上面的結論來探討這個部分。

1. 先$a_1$後$a_5$、先$a_1$後$a_8$、先$a_4$後$a_5$、先$a_4$後$a_8$、先$a_5$後$a_1$、先$a_5$後$a_4$、先$a_8$後$a_1$、先$a_8$後$a_4$，棋盤變為：

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

(1) 配合上面的結論，先手可以使用將（$a_1$、$a_3$、$a_5$）分為同一組、（$a_2$、$a_4$、$a_6$）分為同一組，先手計算香蕉總和後再應戰。

(2) 前提是先手第一取必須大於後手第一取，即可得勝。

2. 先$a_1$後$a_4$、先$a_4$後$a_1$、先$a_5$後$a_8$、先$a_8$後$a_5$，棋盤變為：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | $b_2$ | | |
| $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ |

(1) 先$b_1$後$b_2$、先$b_2$後$b_1$，棋盤變為：

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

配合遊戲 B 策略，先手依據奇數組的總和以及偶數組的總和來決定選的位置。

(2) 先$b_1$後$b_3$、先$b_1$後$b_6$、先$b_2$後$b_3$、先$b_2$後$b_6$，棋盤變為：

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

配合遊戲 C 策略，先手依據（$a_1$、$a_3$）的總和以及（$a_2$、$a_4$）的總和來決定選的位置。

(3) 上述(1)、(2)的討論都立足於前提是先手第一取必須大於後手第一取，即可得勝。

(二) 因此，我們接下來就必須探討先手第一取小於後手第一取的情況。

(1) 當先手第一取會造成後手第一取比較大的時後，上述（一）的方法反而會造成後手得勝。

(2) 因此我們這邊提出先手第一取的條件，在無法保證比後手第一取大的時後，先手必須放棄『取大數字策略』改取第二大的箱子，接下來就如同（一）討論到的所有狀況。

(3) 意外的發現，在二排八箱的情況下也會被迫出現和局的狀況。

伍、研究結果

一、遊戲 A：

(一) 方向固定時，先手必須考慮拿取方向（以左數起，若目標在奇數位，則先手需拿最左數，若目標在偶數位，則拿取方向相反），且必須觀察目標在奇數位或偶數位；方向不固定時，先手一定會取得目標。

(二) 先手一定會取得目標。

二、遊戲 B：

(一) 同遊戲 A 的方式，先手必勝。

(二) 先手依據奇數組的總和以及偶數組的總和來決定選的位置。

三、遊戲 C：

(一) 『6 根香蕉箱』放在兩旁（$a_1$、$a_3$、$a_3$、$a_6$）則先手獲勝，但若策略不變，則會改變結果。

(二) 先手一定會取得目標，但有三種拿法：

1. 拿每箱有最多根的香蕉數量（大多數皆此種拿法）
2. 觀察如何拿到『6 根香蕉箱』，發現只要先手拿到 6 根香蕉就會獲勝，但也有例外！例如：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 1 5 | 4 2 5 | 1 4 3 | 2 4 5 | 2 5 4 | 2 5 3 | 1 4 5 | 2 4 3 | 1 5 4 | 3 5 4 |
| 2 6 3 | 1 6 3 | 2 6 5 | 1 6 3 | 1 6 3 | 1 6 4 | 2 6 3 | 1 6 5 | 2 6 3 | 1 6 2 |

3. 要捨棄拿多的，因為旁邊的數量較少，此時是要觀察左下、中上、又下的和，與另一組和的大小，來判別如何才能得勝。

$\boxed{1}$ 5 $\boxed{3}$

2 $\boxed{6}$ 4

四、遊戲 D：

(一) 『8 根香蕉箱』放在兩旁（$a_1$ 、$a_3$ 、$a_3$ 、$a_6$）則先手獲勝，但若策略不變，則會改變結果。

(二) 若先手第一取小於後手第一取，則先手必須放棄『取大數字策略』改取第二大的箱子才能不敗。

## 陸、討論

一、再排成一列的取數方法裡，其實有些特例不見得要按照奇、偶性也能獲得勝利，

二、在我們原本的預想中，是想要討論出$m \times n$的取數策略，但整個討論過程中發現太多變數，以至於延宕了研究進度，未來我們會繼續朝這個方向努力下去。

三、在研究的過程中我們有發現有前輩曾做過類似的作品，原以為我們可以依此延伸加快研究速度，但詳閱後發現我們兩者的遊戲方法略有差異，所以研究方向是不同的。

## 柒、參考資料及其他


一、康軒文教事業。國中數學第四冊 1-1 數列。

二、台灣 2008 年國際科學展覽會-數學科傑克船長的心機，王新博。

三、台灣 2009 年國際科學展覽會-數學科傑克船長的心機，王新博。