

金門地區第 58 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：數列與級數探討

關 鍵 詞：等差數列、等差級數、分群法

編 號：

# 數列與級數的探討

## 摘要

本篇文章主要討論將八年級下學期所學的等差數列、等差級數概念來討論其他的數列與級數的問題;首先要先了解課本內等差數列的特性與等差級數和的運算公式，在學完本章內容後，老師給了我們幾道數列與級數的題目，剛開始不了解數列的特性，於是我們開始展開了研究與討論，分組、分群…等等方法一一使出，嚼盡腦汁、試著使用我們所學的知識來應用於題目上，最後終於討論完、順利解開題目，也完成了這次的討論與結果。

## 壹、研究動機

將這學期所學習等差數列與等差級數的概念應用於題目，進行研究與討論:

題目:

一、 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

(1)  $\frac{7}{10}$  為第幾項?

(2) 第 100 項為?

一、 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \dots$

則  $\frac{5}{12}$  為第幾項?

三、數列  $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, \dots$ ，則(之

後依次放入 1 個 2，2 個 2，個 2...

(1) 第 83 項為何? (2) 前 83 項之和為?

四、一數列  $0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  也就是在  $k$  個 0

和第  $k-1$  個 0 中間( $k$  是正整數)有  $2^{k-1}$  個 1，則第 1000 項之前(包含第 1000 項)共有多少

個 1?

## 五、求級數 $1+2+2+3+3+3+4+4+4+4\cdots$ 至第 100 項之和?

### 貳、研究目的

配合八年級下學期第一章等差數列及等差級數的課程內容，探討不同種類數列，試著找出數列的規律與特性，研究討論後並試著描述出該題所要的答案來。

### 參、研究設備及器材

紙、筆、八年級下學期數學課本、高中課本數列與級數概念

### 肆、研究過程或方法

首我們需要先了解數列的特性:

數列:將一些數字排成一列就稱為數列。

等差數列:若一數列中，任意相鄰兩項，後項減前項的差都相等，此數列就稱為等差數列，而這個差稱為公差。

公差( $d$ ) = 後項-前項

若等差數列的首項為  $a_1$ ，公差為  $d$ ，則此等差數列的第  $n$  項

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

級數:將一個數列的各項依次用「+」號連接起來，就稱為級數。

等差級數: 將一個等差數列的各項依次用「+」號連接起來，就稱為等差級數。

等差級數前  $n$  項的和:

一個等差級數從第 1 項加到  $n$  項的和，稱為此等差級數前  $n$  項的和，

以  $S_n$  來表示，即  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
$$= \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

學習了這些課程後，接下來我們要開始來討論我們的題目了。

題目一、 $\frac{1}{1}$ 、 $\frac{2}{1}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{1}$ 、 $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{4}{1}$ 、 $\frac{3}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、……

(1)  $\frac{7}{10}$  為第幾項?

(2) 第 100 項為?

(1)  $\frac{7}{10}$  為第幾項:

我們發現，將分子和分母相加的數有規律、分母順序為 1、1、2、1、2、3、1、2、3、4……分子的順序為 1、2、1、3、2、1、4、3、2、1……

試著分類，找出答案

分群後，分子分母相加的和

$(\frac{1}{1})$ 、 $(\frac{2}{1}, \frac{1}{2})$ 、 $(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3})$ 、 $(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4})$ 、依此類推

2      3                  4                          5

第一組有 1 個，第二組有 2 個，第 3 組有 3 個，依此類推:

故依此分類下去，共有 15 組是完整的(最後一組分子分母的和為 16)，

另外將分子及分母相加到的數為 17，17 這一組數並不是完整的，

所以我們尋找加起來為 16 的分數(共可分 15 組)，

個數共有  $1+2+3+4+\dots+15=\frac{15(1+15)}{2}=120$

接下來，分母及分子加起來有 17 的有  $\frac{16}{1}$ 、 $\frac{15}{2}$ 、 $\frac{14}{3}$ ……、 $\frac{17}{10}$  共 10 項，

$120+10=130$ ，所以  $\frac{7}{10}$  為第 130 項。

(2) 第 100 項為?

分群後，分子分母相加的和

$(\frac{1}{1})$ 、 $(\frac{2}{1}, \frac{1}{2})$ 、 $(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3})$ 、 $(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4})$ 、依此類推

2      3                  4                          5

我們先尋找 100 以內完整的組數，發現:

若分子及分母相加為 14 的數(共有 13 組)時，

$1+2+\dots+12+13=\frac{13(1+13)}{2}=91$

接下來和為 15 的有  $\frac{14}{1}$ 、 $\frac{13}{2}$ 、 $\frac{12}{3}$ …… $\frac{6}{9}$  共 9 項，

所以第 100 項為  $\frac{6}{9}$

題目二、 $\frac{1}{1}$ ， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{4}$ ， $\frac{3}{4}$ ， $\frac{4}{4}$ ， $\frac{1}{5}$ ， $\frac{2}{5}$ ， $\frac{3}{5}$ ， $\frac{4}{5}$ ， $\frac{5}{5}$ ……

則  $\frac{5}{12}$  為第幾項？

首先我們先試著出題目的特性與規律，分群時發現：

分母有特性、分子亦有，分子分母的總和：

$(\frac{1}{1})$ ， $(\frac{1}{2}, \frac{2}{2})$ ， $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3})$ ， $(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4})$ ， $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5})$ ……

1 個

2 個

3 個

4 個

5 個

規則為：

1. 當分子為 1 時有一項，分子為 2 時有兩項……

所以當分子為 n 時有 n 項相同分母的數。

2. 當分母為 1 時，分子 1 從開始 1 結束，分母為 2 時，從 2 開始結束，分母為 3 時，

從 3 開始結束……，所以當分母為 n，n 項的分子從 1 開始 n 結束

於是我們推論：

1. 由於  $\frac{5}{12}$  為分母的有 12 項，不確定為第幾項，所以先計算  $\frac{1}{1}$  到  $\frac{11}{11}$  有幾項。

2.  $\frac{5}{12}$  為分母 12 的第 5 個，將推論 1 之解加上 5。

計算：

數學課本等差數列及等差級數兩章節和公式  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$a_1 = 1$        $n = 11$        $a_n = 11$

$S_{11} = \frac{11(1+11)}{2}$        $S_{11} = 66$

回到推論一將分母 12 的 5 項加入       $66 + 5 = 71$

故  $\frac{5}{12}$  為第 71 項



題目四、一數列 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, ……也就是在 k 個 0 和第 k-1 個 0 中間(k 是正整數)有  $2^{k-1}$  個 1，則第 1000 項之前(包含第 1000 項)共有多少個 1?

規則:

1. 在兩個零之間的 1 是 2 的次方，從  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$

在 k 個 0 和第 k-1 個 0 中間有  $2^{k-1}$  個 1

2. 2 的 k 次方就有 k+1 個零

推論:

先計算最貼近 1000 的 2 次方和

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = 1023$$

所以第一千項在  $2^8$  和  $2^9$  之間

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8 = 511$$

前面的 9 個 0 和第 512 項的第十個 0 所以共有 10 個 0

故  $(1000 \text{ 項}) - (10 \text{ 個 } 0) = 990 \text{ 個 } 1$

題目五、求級數  $1+2+2+3+3+3+4+4+4+4 \dots$  至第 100 項之和。

首先，我們先觀察級數的特性:

將此級數分類為  $1+(2+2)+(3+3+3)+(4+4+4+4) \dots$ ，

試著找出接近但不超過 100 項的組數，

因此，假設級數循環了 13 次，

則我們代入 8 年級上學期等差級數的公式： $\frac{n(a_1+an)}{2}$  後，

$$\text{可得 } \frac{13 \times 14}{2} = 91。$$

則我們可以得知第 92 到 100 項為 14。我們可以發現，

此級數每一個數字的和都是此數字的平方，

所以級數  $1+(2+2)+(3+3+3)+(4+4+4+4) \dots$  至第 100 項之和為

$$1+2^2+3^2+4^2 \dots + 13^2 + 14(100 - 92 + 1) = 945$$





陸、參考資料及其他

康軒版八下數學課本、高中數學數列與級數單元