金門地區第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學

組　　別：國中

作品名稱：四邊形的內心外心重心

關 鍵 詞：尺規作圖　、　重心

編　　號：

四邊形的內心外心重心

摘要

本研究的目的，是探討凸四邊形內心外心重心的定義及性質，以及一些課本沒有提到關於三角形重心的性質。

壹、研究動機

在第五冊第三章「 三角形的三心 」單元，有教到三角形的內心外心重心，也提到一部份四邊形內心及外心，但是完全沒有提到重心，有同學提問，正方形有重心嗎？四邊形有重心嗎？五邊形有重心嗎？如果有，能不能利用尺規作圖畫出來，我們幾位有興趣的同學就展開了下面的研究。

貳、研究目的

一、利用尺規作圖，畫出凸四邊形的重心，並且證明。
二、凸四邊形的重心有什麼性質？
三、三角形重心的性質除了課本提到的還有其他的嗎？
四、凸四邊形的內心，有什麼性質？
五、凸四邊形的外心，有什麼性質？

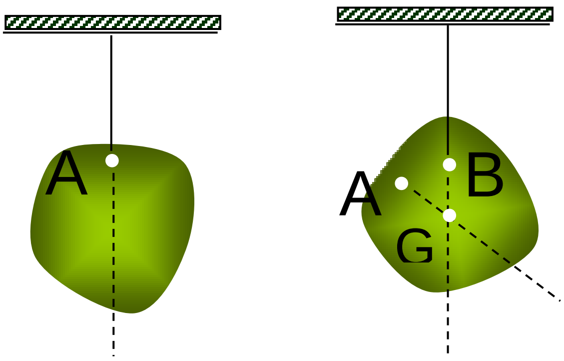
參、研究器材

GSP 繪圖軟體、直尺圓規。

肆、研究結果

一.預備知識
(一)重心的意義：
1、 重心的意義：物體所受重力之合力的等效著力點。
靜力平衡的問題中，在計算一個物體的重力對某一支點所產生的力矩時，並不需要對組成物體的每一質點計算重力所產生的力矩再作加總，而是將物體的重量當成是集中在某一點，此點即稱為物體的「重心」。

2、重心位置的測定：
如圖所示，在物體上任取不同兩點 A、B，以細繩將物體鉛直懸吊成靜力平衡，兩次通過懸吊點的鉛垂線交點即為物體重心的位置。



3、質心：質心可看成是物體質量的集中點。在牛頓運動定律中用來代表整體運動的點。

4、重心與質心的特性：

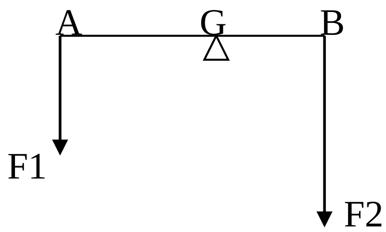
（1）在無重力處重心並無意義，但質心仍然存在。

（2）在均勻重力場中，物體的質心與重心在同一點。

（3）物體的重心不一定在物體內

（4）兩質點的系統，質點和重心的距離與其重量成反比。

(二)槓桿原理(如圖)



G 為支點，若槓桿保持平衡，則

F1×AG=F2×BG　反之也成立。

(三) 分點公式： 已知坐標平面上兩點 A(X1,Y1)

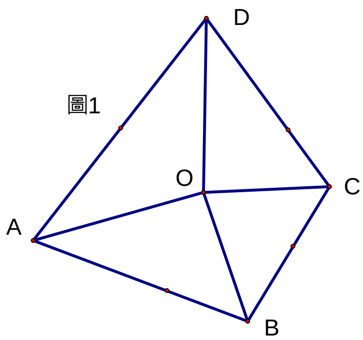
B(X2,Y2)， 若點 P 在線段 AB 上且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$

= m :n ， 則 P 點坐標為 $\left(\dfrac{m\times X2+n\times X1}{m+n},\dfrac{m\times Y2+n\times Y1}{m+n}\right)$

也可以用 P= $\dfrac{n\times A+m\times B}{m+n}$ 表示。

二. 四邊形內心的研究結果

(一)四邊形內心的定義: 如果一個四邊形四個內角的平分線共點，則此點稱為內心，如圖 1，O 點稱為是 ABCD 的內心。



註: 此定義和三角形內心的定義相同，差別是任意三角形都有內心但四邊形不一定有內心。

(二) 四邊形內心的性質之一: 如果一個四邊形 ABCD 有內心，則內心到四邊的距離相等，

如圖 2，圓 O 稱為是 ABCD 的內切圓

證明 ：連接線段 OA，因為線段 OA 為∠A 的平分線

所以 $\overline{OE}=\overline{OH}$ （ 角平分線性質 ）

同理 $\overline{OE}=\overline{OF}$ 、$\overline{OF}=\overline{OG}$ 、$\overline{OG}=\overline{OH}$

可得 $\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{OG}=\overline{OH}$

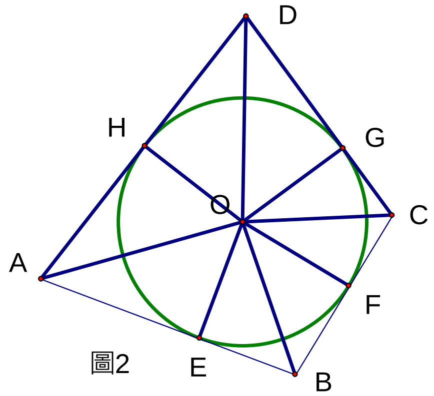


圖2

(三) 四邊形內心的性質之二: 如圖 3，如果四邊形 ABCD 有內心，則四邊長度滿足對邊和相等， 即 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ 。

證明: 由圓的切線性質知道

$\overline{AE}=\overline{AH}$ 、 $\overline{BE}=\overline{BF}$ 、 $\overline{CG}=\overline{CF}$ 、$\overline{DG}=\overline{DH}$

將四式相加即得 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{CD}$

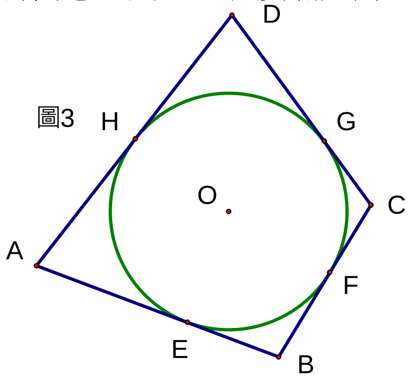


圖3

三. 三角形重心的研究結果:

(一)三角形重心的定義之 1： 三角形三條中線會共點，此點稱為重心(課本的定義)

(二)三角形重心的定義之 2： 三角形重心可以想成是此三角形質量集中的地方，
即重心就是質心(網路資料)

(三)三角形重心的定義之 3： 如圖 4，在三角形 ABC 內部可以找到一個點 G，在點 G 繫上細線懸吊，此時三角形所在的平面會和水平面平行，點 G 稱為此三角形的重心(網路資料)。

圖 5

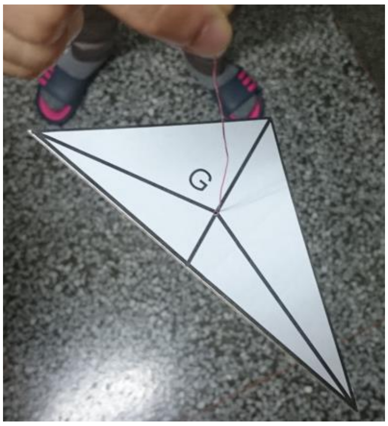


圖 4

(四)三角形重心的定義之 4 ： 如圖 5，在三角形 ABC 內部可以找到一個點 G，在點 G 以鉛筆或食指頂住，此時三角形會保持平衡不會掉下來，此時三角形所在的平面會和水平面平行，點 G 稱為此三角形的重心(課本)。

(五) 計算三角形重心坐標的公式如下

如圖 6，設三角形 ABC 三頂點坐標為 A(X1,Y1) ， B(X2,Y2) ，C(X3,Y3) ，則重心 G 坐標為 $\left(\frac{X1+X2+X3}{3},\frac{Y1+Y2+Y3}{3}\right)$ ，可以簡記為 $G=\frac{A+B+C}{3}$

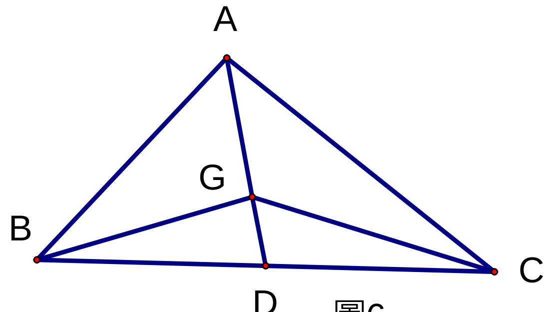


圖6

證明：因為 D 為 $\overline{BC}$ 中點，

所以 D 坐標為 $\left(\frac{X2+X3}{2},\frac{Y2+Y3}{2}\right)$

由重心性質知 $\overline{AG}$: $\overline{GD}$ =2:1

利用預備知識的分點公式可得

G 點坐標為 $\left(\frac{1\times X1+2\times\frac{X2+X3}{2}}{3},\frac{1\times Y1+2\times\frac{Y2+Y3}{2}}{3}\right)=\left(\frac{X1+X2+X3}{3},\frac{Y1+Y2+Y3}{3}\right)$

(六) 三角形重心有一性質如下 (課本)：

如圖 7，設 G 為三角形 ABC 的重心，

則三個三角形的面積相等。

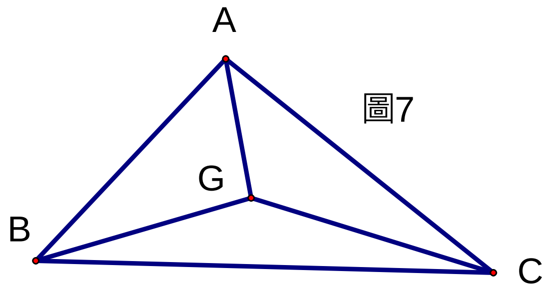
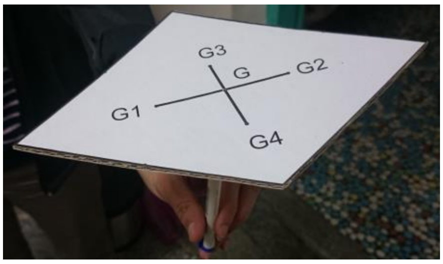


圖7

四. 凸四邊形重心的研究結果:

(一) 凸四邊形重心的定義之 1：四邊形重心可以想成是此四邊形質量集中的地方，即重心就是質心(網路資料)。

(二) 凸四邊形重心的定義之 2：如圖 8，在四邊形 ABCD 內部可以找到一個點 G，在點 G 繫上細線懸吊，此時四邊形所在的平面會和水平面平行，點 G 稱為此四邊形的重心(網路資料)



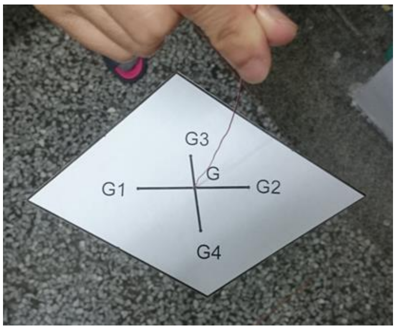


圖 9　　　　圖 8

(三) 凸四邊形重心的定義之 3：如圖 9，在四邊形 ABCD 內部可以找到一個點 G，在點 G 以鉛筆或食指頂住，此時四邊形會保持平衡不會掉下來，此時四邊形所在的平面會和水平面平行，點 G 稱為此四邊形的重心(由課本三角形重心的定義類推得到)。

(四) 找凸四邊形重心的方法 :我們稱它為分割法

[想法]：連接一條對角線將凸四邊形切割成兩個三角形，分別找出重心，用線段連接兩重心。再連接另外一條對角線，又得到兩個三角形，也分別找出兩個三角形的重心，用線段連接兩重心，則此兩條重心連線會交於一點，此點就是此凸四邊形的重心。

[作法]：

①如圖 10，連接線段 BD，分別找出 ΔABD 和 ΔBCD 的重心 G_1 和 G_2，連接線段 $\overline{G_1G_2}$

②如圖 11，連接線段 AC，分別找出 ΔACD 和 ΔABC 的重心 G_3 和 G_4，連接線段 $\overline{G_3G_4}$

③如圖 12，線段 $\overline{G_1G_2}$ 和線段 $\overline{G_3G_4}$ 的交點 G 就是 ABCD 的重心。

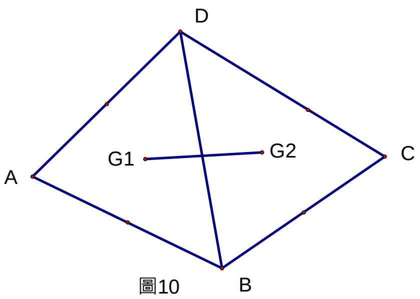


圖10

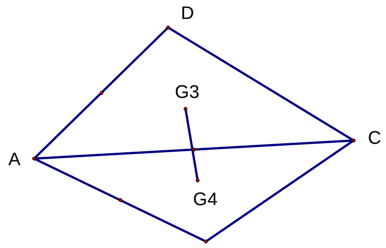


圖11

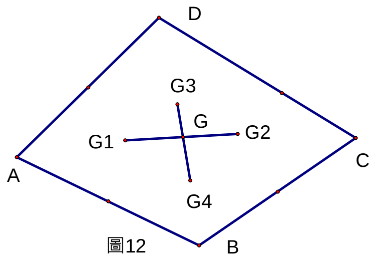


圖12

[證明]：

①在圖 10 中，想像 ABCD 填滿相同密度的物質，薄薄的一層，厚度相同。可將 ΔABD 的質量想成集中在 G_1 點，ΔBCD 的質量想成集中在 G_2 點，則 ABCD 的重心必在線段 $\overline{G_1G_2}$ 上。

②同理在圖 11 中，ABCD 的重心必在 $\overline{G_3G_4}$ 上。

③在圖 11 中，因此線段 $\overline{G_1G_2}$ 和線段 $\overline{G_3G_4}$ 的交點 G 就是 ABCD 的重心。

(五) 找凸四邊形重心的方法：(舉例說明)

如圖 13， 設四邊形 ABCD 四個頂點坐標如下 : A(0 , 0)、 B(6 , 0)、C (3 , 6) 、D (0 , 6)

①如圖 14，連接 BD，可以計算出三角形 ABD 重心 G1(2 , 2)以及三角形 BCD 重心 G2(3 , 4)
再算出直線 G1G2 方程式為 2X－Y－2＝0

②如圖 15，連接 AC，可以計算出三角形 ABC 重心 G3(3 , 2)以及三角形 ACD 重心 G4(1 , 4)
再算出直線 G3G4 方程式為 X＋Y－5＝0

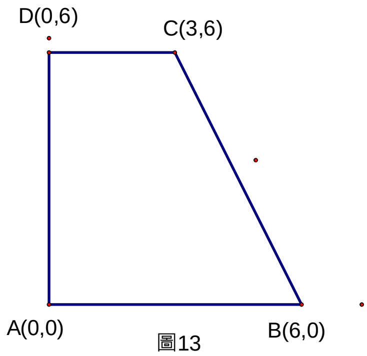


圖13

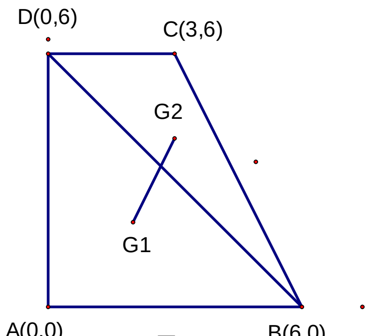


圖14

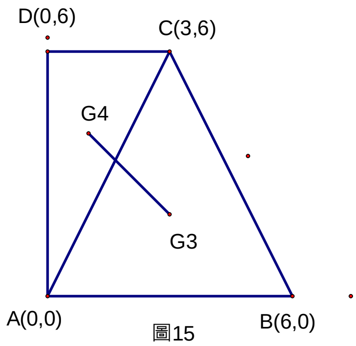


圖15

③如圖 16，直線 G1G2 與直線 G3G4 的交點為 $G\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$

即四邊形的重心坐標為 $\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$

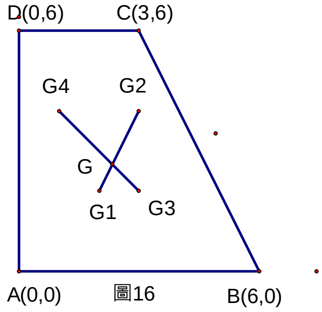


圖16

(六) 求凸四邊形重心有公式嗎 ？ 如果有，由三角形重心公式類推， 此公式可以簡記為

重心坐標 = $\frac{A+B+C+D}{4}$ ，我們研究的結果是沒有， 說明如下：

如圖 17，由上面的第(五)點 ，

我們已經算出四邊形 ABCD 的重心為 $\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$

將四個頂點的 X 坐標取平均值得 $(0+6+3+0)\div 4=\frac{9}{4}$

將四個頂點的 Y 坐標取平均值得 (0＋0＋6＋6) ÷ 4＝3

得坐標 $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{1}\right)$ ，此坐標並不是四邊形 ABCD 的重心坐標 $\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$

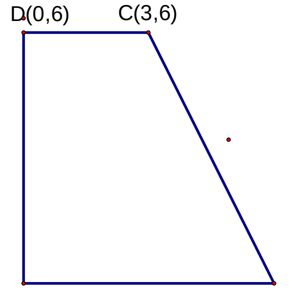


圖17

由此例子可知四邊形 ABCD 的重心坐標並不是 $\frac{A+B+C+D}{4}$

也就是說求凸四邊形重心沒有公式。

(七) 凸四邊形的重心能否將此四邊形分割成四個面積相等的三角形 ？ 我們研究的結果是沒有， 說明如下：

如圖 18，設四邊形 ABCD 四個頂點坐標如下 ：A(0 , 0)、B(6 , 0)、C (3 , 6) 、D (0 , 6)

由上面的第(五)點 ，

我們已經算出四邊形 ABCD 的重心為 $\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$

將四個三角形的面積一一算出可得

三角形 ABG 的面積＝8

三角形 BCG 的面積＝7

三角形 CDG 的面積＝5

三角形 ADG 的面積＝7

發現這四個三角形的面積並不相等

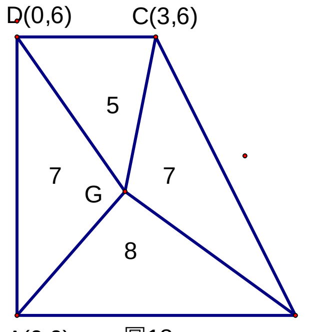


圖18

三 四邊形外心的研究結果：

(一) 四邊形外心的定義: 如果一個四邊形四邊的中垂線共點，則此點稱為外心，如圖 19，O 點稱為是 ABCD 的外心。

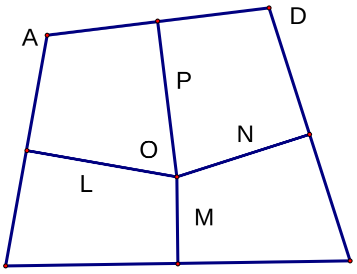


圖19

註: 此定義和三角形外心的定義相同，差別是任意三角形都有外心，但四邊形不一定有外心

(二) 四邊形外心的性質之一: 如圖 20，如果四邊形 ABCD 有外心，設外心為 O，則 O 到四個頂點的距離相等，即$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$

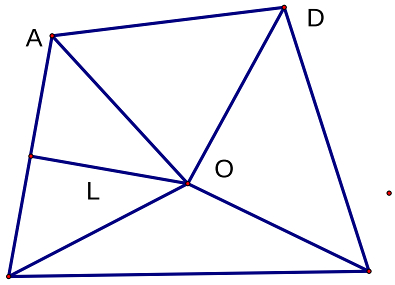


圖20

證明: 因為 L 為$\overline{AB}$的中垂線且 O 在 L 上

由中垂線性質得$\overline{OA}=\overline{OB}$

同理可得$\overline{OB}=\overline{OC}$、$\overline{OC}=\overline{OD}$、$\overline{OA}=\overline{OD}$

因此$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$

註 :以 O 為圓心，$\overline{OA}$為半徑所畫出來的圓稱為外接圓

(三) 四邊形外心的性質之二: 如圖 21，如果四邊形 ABCD 有外心，則此四邊形的對角互補即∠A＋∠C＝180 度 、 ∠B＋∠D＝180 度

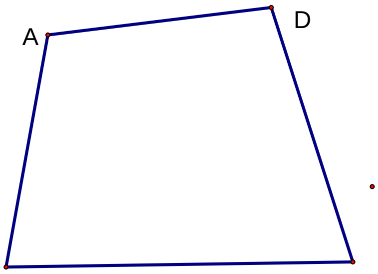


圖21

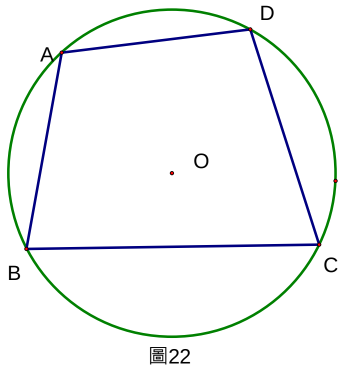


圖22

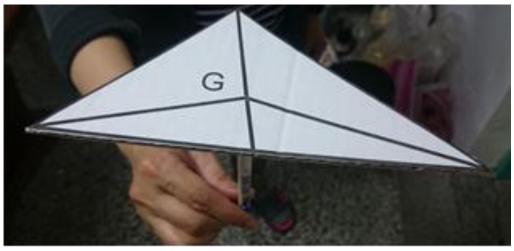
證明: 由上述性質可知$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$，以 O 為圓心$\overline{OA}$為半徑畫一圓，此圓必定通過 ABCD 四點，如圖 22，則∠A、∠B、∠C、∠D 都是圓周角，由圓周角性質知

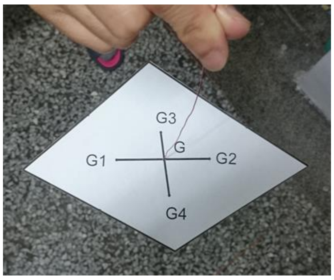
$\angle A=\frac{1}{2}\times\left(\text{弧}BCD\text{度數}\right)$ 、 $\angle C=\frac{1}{2}\times\left(\text{弧BAD度數}\right)$

得$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\times\left(\text{弧}BCD\text{度數+弧}BAD\right)=\frac{1}{2}\times 360\text{度}=180\text{度}$

同理∠B＋∠D＝180 度

四・實驗：列印出三角形及凸四邊形，並找出重心。用細鐵絲穿過重心點懸吊，及用鉛筆撐住重心點發現確可平衡。如圖





伍、研究結論

一．藉由實驗我們確認所找的重心點的確能使得圖形平衡。

二．有些三角形具有的性質四邊形不一定具有反之
有些四邊形具有的性質三角形不一定具有

三．這件科學作品並不困難，有些結果是利用網路搜尋，我們做完以後很高興，因為這是我們兩個人第一次做科學作品，從無到有。

陸、參考資料

一、高中物理學----重心的意義（網路搜尋）
二、第三章 「三角形的內心、外心、重心」，國民中學數學第五冊，2017，康軒出版社。