

附件五～A

金門地區第 58 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：物理

組 別：國中組

作品名稱：透鏡變化—焦距

關 鍵 詞：焦距、高斯公式、透鏡組 (最多 3 個)

編 號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號由國立臺灣科學教育館統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

摘要

利用太陽光聚焦法、透鏡成像虛像的性質及蠟燭的光屏成像法皆可得到單一凸透鏡的焦距，且準確性高；找尋凹透鏡的焦距時使用視差法極不易獲得焦距，可使用透鏡成像的性質，準確性高。物體接近或遠離透鏡焦點時速率極大，越是遠離速率越趨近於零。透鏡組採用上述方法所獲得的焦距與用高斯公式計算者皆有出入，至今我們尚未找到何緣故造成此結果。

壹、 研究動機

八年級自然課上到透鏡成像時有做蠟燭成像的實驗，而在實驗過程中凸透鏡焦距是用太陽光匯聚一點的性質來判斷，但是凹透鏡的特性是發散光線，凹透鏡的焦距要如何得知，習作裡找不到，所以我們開始發想如何得到凹透鏡的焦距。另外在上課時看到透鏡上有標記焦距，不禁想問是否每一片透鏡的焦距都和上面寫的一樣，因此藉由此機會，深入探討關於透鏡成像的問題。

貳、 研究目的

- 一、比較兩種不同的方法測量凸透鏡的焦距並比較其誤差之大小。
- 二、利用成像的性質來測量凹透鏡的焦距並探討其誤差之大小。
- 三、推導並利用薄透鏡的高斯公式探討凸透鏡與凹透鏡的焦距，及討論物距 p 與像距 q 的相對關係。
- 四、透過前述方法探討組合透鏡的等效焦距之大小。

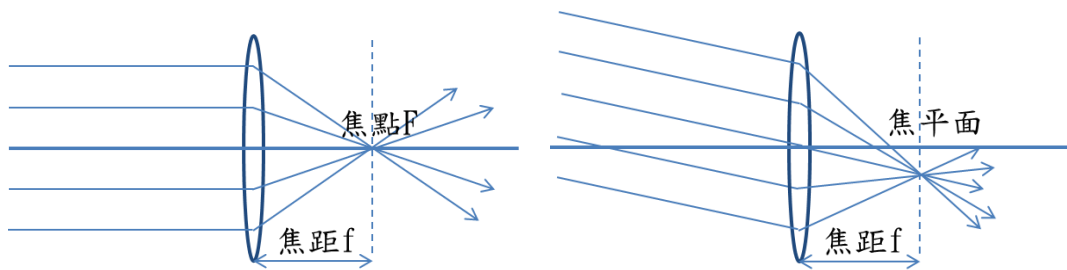
參、 研究設備及器材

凸透鏡*3(不同焦距)	凹透鏡*2(不同焦距)	滑軌*1
蠟燭*1	成像屏*1	直尺*1
電腦及軟體(Mathematica)		

肆、 研究過程或方法

一、凸透鏡的成像法

甲、太陽光由無窮遠處入射可視為平行光，當平行光與主軸平行時，通過透鏡將會會聚於一個點，此點即為焦點 F ，透鏡至鏡心的距離即為焦距 f ；當平行光與主軸不平行時，通過透鏡將會會聚在焦平面上，焦平面至鏡心的距離即為焦距 f 。



乙、利用凸透鏡當物體放在焦點內可成正立放大的像此一性質：

<p>三角形 OAB 與三角形 $OA'B'$ 為相似三角形，當 $\overline{OA'} = 2\overline{OA}$ 時，成像大小 $\overline{A'B'} = 2\overline{AB}$。此時三角形 COF 與三角形 $B'A'F$ 亦為相似三角形，又 $\overline{OC} = \overline{AB}$，故 $\overline{A'B'} = 2\overline{AB} = 2\overline{OC}$，即 $\overline{A'F} = 2\overline{OF}$，此時物距即為焦距的一半。</p>	<p>在紙上畫出三條等距的直線編號 1、2、3，前後移動透鏡使成像 2 與物 1 號重疊，即成像放大為物體的兩倍時，紀錄此時的物距，此距離即為焦距的一半。</p>
---	---

二、凹透鏡的成像法

利用凹透鏡可成正立縮小的像此一性質：

<p>三角形 OAB 與三角形 $OA'B'$ 為相似三角形，當 \overline{OA} 恰為焦距 f 時，$\overline{OA} = 2\overline{OA'}$，成像大小 $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$，此時物距即為焦距。</p>	<p>在紙上畫出三條等距的直線編號 1、2、3，前後移動透鏡使成像 1 與物 1 號重疊，即成像縮小為物體的二分之一時，紀錄此時的物距，此距離即為焦距的。</p>
---	---

三、薄透鏡的高斯公式：

造成光線經過透鏡發生折射現象是因介質不同之故，針對薄透鏡而言，可簡化光的路徑，並可用兩條簡單的成像規則畫出像的位置：平行主軸的光線通過鏡後(凸透鏡)/鏡前(凹透鏡)焦點、通過鏡心的光線不偏折。

- (一). 由數學方法推論出兩條直線的交點位置，分別推導出凸透鏡與凹透鏡的高斯公式，並利用此法探討凸透鏡的焦距及其誤差。
- (二). 由此公式分別討論凸透鏡與凹透鏡其物距 p 與像距 q 的相對關係，及物體移動速率與像的移動速率之關係。

四、兩片薄透鏡形成之透鏡組：

人眼之水晶體可視為一凸透鏡，物體經由此凸透鏡成像在視網膜上極為我們人眼所見之像。當近視或遠視發生時，分別會以凹透鏡及凸透鏡矯正之，因此我們討論兩片薄透鏡形成之組合。

- (一). 利用實驗三高斯公式的方法以及利用透鏡成像的性質來找等效焦距。
- (二). 利用(三)中所得之公式，將第一片透鏡之成像位置視為第二片透鏡之物體所在位置，進行疊代，探討與實驗結果之異同。

伍、研究結果及討論

實驗一、凸透鏡的成像

(一).利用平行光通過凸透鏡的成像方法:

焦距(cm)	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均	誤差
10	9.2	9.8	9.3	10.1	10	9.68	3.20%
15	14.3	14.7	15.1	14.7	14.8	14.72	1.87%
30	19.9	29.8	30	30.1	29.9	27.94	6.87%

(二).利用凸透鏡當物體放在焦點內可成正立放大的像此一性質:

焦距(cm)	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均	誤差
10	10.5	10.4	9.8	10.2	10.2	10.22	2.20%
15	14.6	15.2	14.2	15.5	15.6	15.02	0.13%
30	29.7	30	29.8	30.2	30.1	29.96	0.13%

綜合上述兩種凸透鏡的成像方法，利用太陽光聚焦尋找焦點操作容易快速，但誤差卻較大，我們覺得原因是太陽光是斜向平行入射進透鏡，匯聚的點是在焦平面上，焦距的判斷需考量此點而使得數據有所誤差。而利用凸透鏡虛像的成像性質方法，因為透鏡邊緣有像差的關係，測量起來較耗時，但誤差較小，僅約 2%。

實驗二、凹透鏡的成像

利用凹透鏡可成正立縮小的像此一性質：

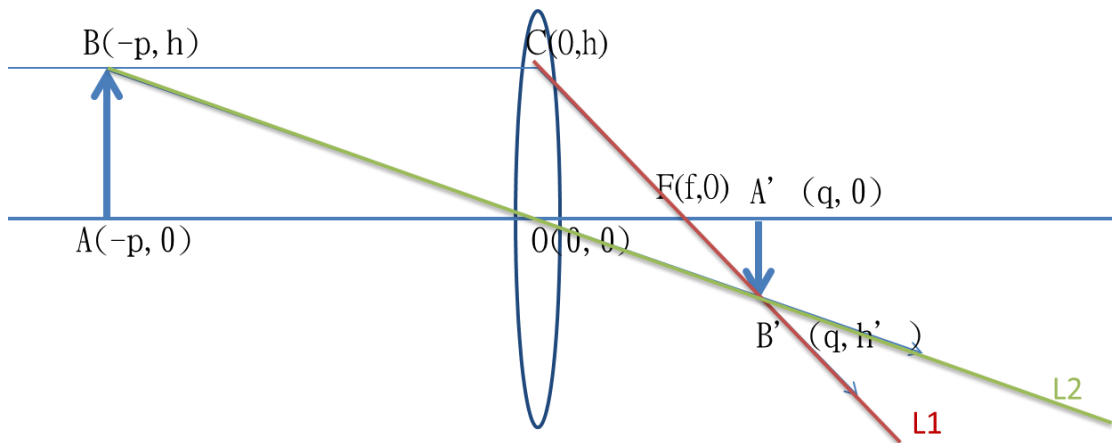
焦距(cm)	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均	誤差
--------	-----	-----	-----	-----	-----	----	----

10	9.7	10.3	11.4	11	9.1	10.3	3.00%
10	10.3	10.5	9.5	10.2	9.7	10.04	0.40%
20	19.8	22	18	20.6	18.7	19.82	0.90%
20	19.8	19.8	19	19.2	21	19.76	1.20%

我們上網找了凹透鏡的成像實驗，網路上以及高中課程裡大多使用視差法來做實驗，但是我們實際量測後發現視差法非常難判斷，而且判定因人而異、誤差極大，我們試了一陣子後便放棄，才再尋找資料構思此法，從實驗結果可看出此法準確度高，誤差僅約 3% 以內。

實驗三、單一薄透鏡的高斯公式探討

(一). 凸透鏡的公式推導



利用凸透鏡成像做圖法可畫出像的位置，訂定座標原點在圓心處，物體 AB 高度為 h ，物距為 p ，成像 $A'B'$ 位在 q 處像高 h' 且 B' 恰在直線 L1 與 L2 的交點上，如上圖所示。

$$\text{直線方程式為} \left\{ \begin{array}{l} \text{L1 通過點 } C(0, h) \text{ 與焦點 } F(f, 0) : y_1 = -\frac{h}{f}x_1 + h \\ \text{L2 通過點 } B(-p, h) \text{ 與鏡心 } O(0, 0) : y_2 = -\frac{h}{p}x_2 \end{array} \right.$$

$$\text{又 L1 與 L2 皆通過點 } B'(q, h'), \text{ 即} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = h' = -\frac{h}{f}q + h \\ y_2 = h' = -\frac{h}{p}q \end{array} \right. \text{解聯立方程式，}$$

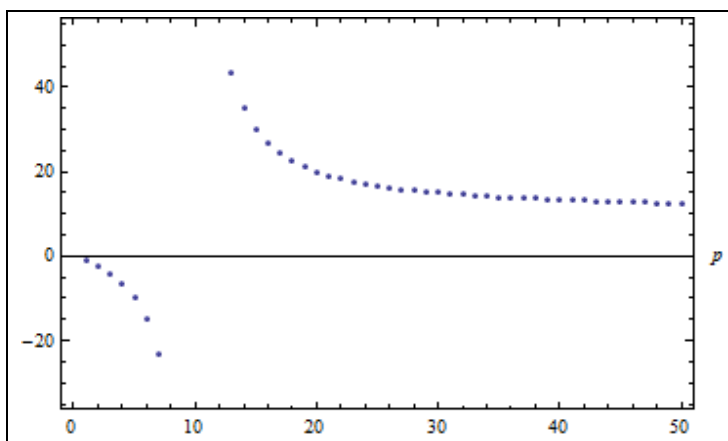
$$-\frac{h}{f}q + h = -\frac{h}{p}q, \text{ 即 } -\frac{1}{p} + \frac{1}{f} = \frac{1}{q}, \text{ 整理得 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \text{ 此即高斯公式。}$$

整理上式可之，一已知焦距 f 的透鏡，改變物距 p 時，像距 q ：

$$\frac{1}{q} = \frac{p-f}{pf}, \text{ 即 } q = \frac{fp}{p-f}, \text{ 帶回原式 } y_2, \text{ 可得 } h' = -\frac{fh}{p-f} = \frac{fh}{f-p}, \text{ } h' > 0 \text{ 表示像是}$$

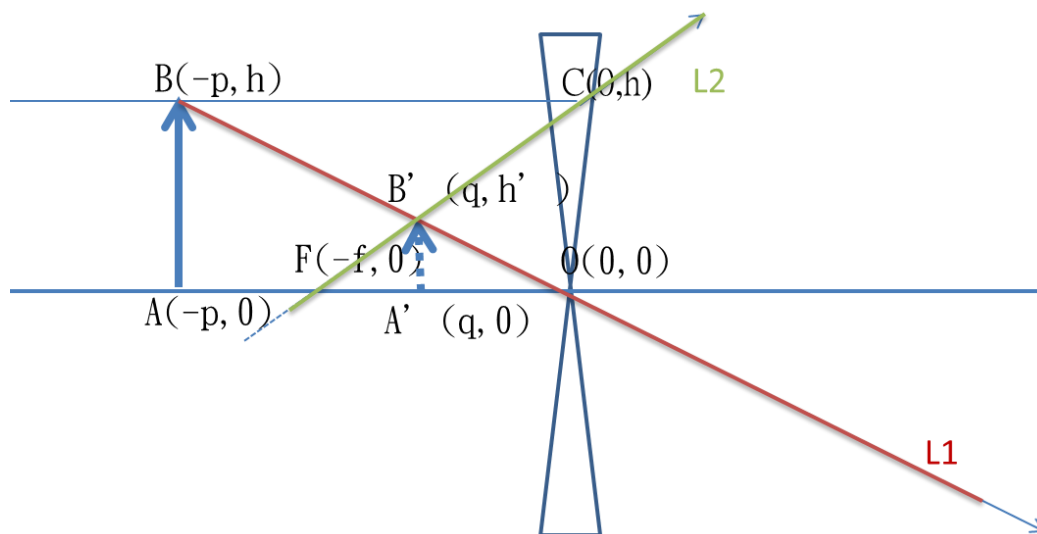
正立的， $h' < 0$ 則像是倒立的。

利用 $q = \frac{fp}{p-f}$ 做圖如下：



焦距 $f=10$ 單位, $p=0\sim 50$ 單位。
 物距 $p < 10$ 時, 像距 q 為負, 由公式推導時正負號的取法可知此時像位於透鏡左方, 亦即像在鏡前, 而物高 $h' > 0$, 亦即為一正立的虛像。當 $p=0$ 時像在無窮遠處, 當 p 越來越大(物越拉越遠), 此時 q 越來越趨近 10。

(二). 凹透鏡的公式推導



利用凹透鏡成像做圖法可畫出像的位置, 訂定座標原點在圓心處, 物體 AB 高度為 h , 物距為 p , 成像 $A'B'$ 位在 q 處像高 h' 且 B' 恰在直線 $L1$ 與 $L2$ 的交點上, 如上圖所示。

$$\text{直線方程式為 } \left\{ \begin{array}{l} L1 \text{ 通過點 } B(-p, h) \text{ 與鏡心 } O(0,0) : y_1 = -\frac{h}{p}x_1 \\ L2 \text{ 通過點 } C(0, h) \text{ 與鏡前焦點 } F(-f, 0) : y_2 = \frac{h}{f}x_2 + h \end{array} \right.$$

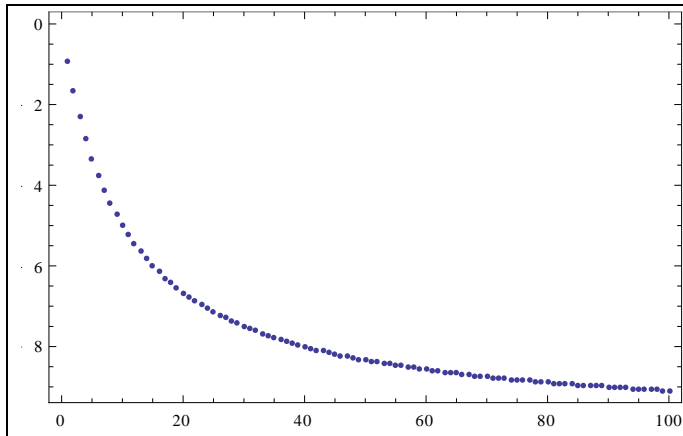
$$\text{又 } L1 \text{ 與 } L2 \text{ 皆通過點 } B'(q, h'), \text{ 即 } \left\{ \begin{array}{l} y_1 = h' = -\frac{h}{p}q \\ y_2 = h' = \frac{h}{f}q + h \end{array} \right. \text{ 解聯立方程式,}$$

整理得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{f}$, 此擊凹透鏡的高斯公式, 與凸透鏡相比, 凸透鏡的焦距 > 0 ,

凹透鏡的焦距 < 0 。

整理上式可之, 一已知焦距 f 的透鏡, 改變物距 p 時, 像距 q :

$\frac{1}{q} = -\frac{p+f}{pf}$, 即 $q = -\frac{fp}{p+f}$, 帶回原式 y_1 , 可得 $h' = \frac{fh}{p+f}$, 從此處可看到 h' 恆正, 表示凹透鏡得到的像必定是正立的。



焦距 $f=10$ 單位, $p=0\sim 100$ 單位。像距恆為負, 由公式推導時正負號的取法可知像位於透鏡左方, 亦即像恆在鏡前, 而物高 h' 亦恆為正, 即凹透鏡成像必為一正立的虛像。當物體越移越遠時, 亦即 p 越大, 成像越趨近鏡前焦點處。

(三). 利用高斯公式量測凸透鏡的焦距

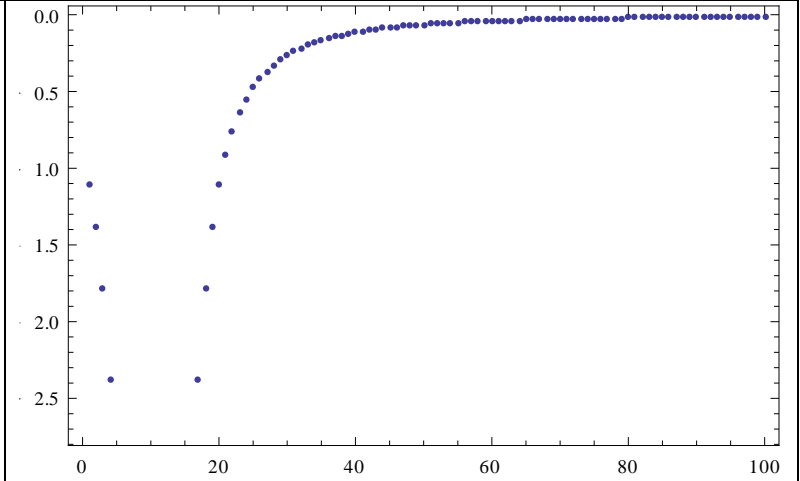
焦距 10cm	第一次	第二次	第三次	第四次
物距	26.8	32.5	40	35
像距	10	16.8	15.5	16.3
焦距	7.28	11.08	11.17	11.12
平均焦距	10.16			
誤差	1.60%			

焦距 15cm	第一次	第二次	第三次	第四次
物距	35	40	45	50
像距	25	23.4	21.8	20.6
焦距	14.58	14.76	14.69	14.59
平均焦距	14.66			
誤差	2.27%			

由實驗結果可知, 利用蠟燭成實像的物距與像距, 代入高斯公式所獲得的誤差值亦小, 適合拿來做凸透鏡焦距的測定法。

(四). 凸透鏡之物體移動速率與像的移動速率之關係

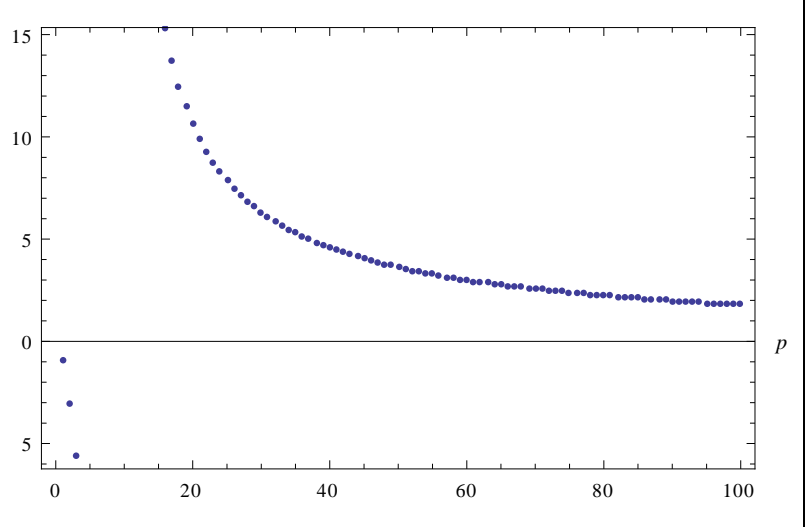
焦距為 10 單位，物體從鏡心等速往後退 100 個單位的圖形如右圖所示。物體接近與遠離焦距 10 時，速率越來越快，物體離焦點處越來越遠時，速率越來越小。或者說，當物體從遠處移近焦點時，速率越來越快。



人的眼睛構造可簡化為水晶體的功能就像一可變焦距的凸透鏡，當我們看遠處物體移近時，越接近會感覺物體的速率越快，對應到平時我們等公車時，公車在遠處感覺行駛得較慢，公車逼近時速率越來越快。

(五). 凹透鏡之物體移動速率與像的移動速率之關係

焦距為 10 單位，物體從鏡心等速往後退 100 個單位的圖形如右圖所示。物體接近與遠離焦距 10 時，速率越來越快，物體離焦點處越來越遠時，速率越來越小。或者說，當物體從遠處移近焦點時，速率越來越快。



凹透鏡與凸透鏡物體移動的速率皆為物體接近或遠離焦點時，速率漸快，兩者的差別顯示在圖中的正負號代表的是像運動的方向，兩種透鏡在焦點內正立虛像皆是往鏡心靠近，而在焦點以外，凸透鏡的速率為負，代表成像是往後退，而凹透鏡的速率式為正，代表成像亦式往鏡心靠近。

實驗四、兩片薄透鏡所形成之透鏡組探討

(一). 透鏡組之焦距實驗實作

我們利用點燃的蠟燭透過透鏡組可在屏幕上成像，判定此透鏡組何可視為一等效的凸透鏡，故除了可以高斯公式求焦距外，亦可使用前述實驗一中利用凸透鏡在焦點內可成正立放大的像此一性質來求得焦距。我們分別將焦距為 10cm 的凹透鏡與凸透鏡放在一起，使兩鏡片間距為 4.5cm。

1. 利用點燃的蠟燭測量無距與像距，代入高斯公式獲得等效凸透鏡的焦距

(1) 凸凹透鏡：

項目	第一次	第二次	第三次	第四次
物距(cm)	111.8	94	120	124.5
像距(cm)	54.1	66.4	42.1	51.1
焦距(cm)	36.46	38.91	31.17	36.23
平均焦距 (cm)	35.69			

(2) 凹凸透鏡：

項目	第一次	第二次	第三次	第四次
物距(cm)	85.85	90	106.8	113.5
像距(cm)	97.2	96	92.5	85.3
焦距(cm)	45.59	46.45	49.57	48.70
平均焦距 (cm)	47.58			

(3) 凸凸透鏡：

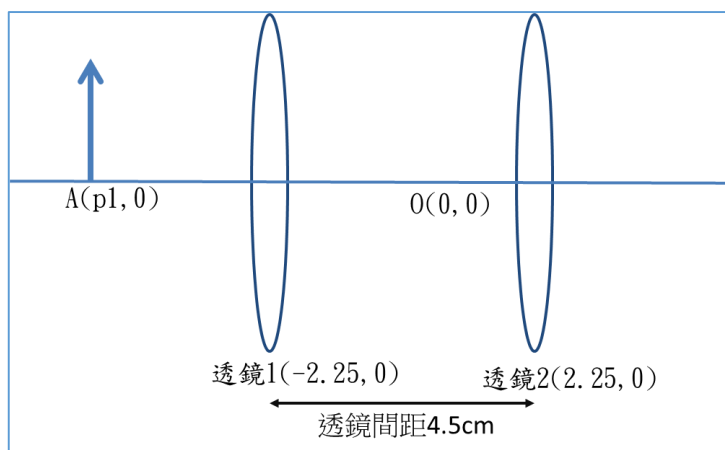
項目	第一次	第二次	第三次
物距(cm)	27.3	36.8	46.8
像距(cm)	9.2	8.2	7.9
焦距(cm)	6.88	6.71	6.76
平均焦距(cm)	6.78		

2. 利用凸透鏡當物體放在焦點內可成正立放大的像此一性質獲得焦距:

	第一次	第二次	第三次	第四次	平均等效焦距(cm)
凸凹透鏡	17	24.8	16.6	18.2	19.15
凹凸透鏡	25.4	28.3	21.4	23.5	24.65

(二). 利用實驗三之公式疊代得知透鏡組的焦距

凹凸透鏡焦距皆為 10cm，鏡片間距 4.5 公分，座標取法為：



高斯公式的正負號取法：

- (1) 凸透鏡焦距取正，凹透鏡焦距取負
- (2) 物體在鏡前取正，鏡後取負

	物距 1	像距 1	物距 2	像距 2	焦距	平均等效焦距
凸凹透鏡	109.55	11.00	-6.50	18.61	17.51	17.54
	91.75	11.22	-6.72	20.52	18.25	
	117.75	10.93	-6.43	18.00	17.26	
	122.25	10.89	-6.39	17.71	17.14	
凹凸透鏡	83.6	-8.93	13.43	39.14	27.82	28.49
	87.75	-8.98	13.48	38.76	28.07	
	104.55	-9.13	13.63	37.57	28.91	
	111.25	-9.18	13.68	37.21	29.18	
凸凸透鏡	25.05	16.64	-12.14	5.48	5.94	5.92
	34.55	14.07	-9.57	4.89	5.91	
	44.55	12.89	-8.39	4.56	5.89	

綜合以上實驗結果與高斯公式推論，我們使用蠟燭成像的方式得到的焦距與透鏡虛像性質成像法獲得的結果有很大的出入，而與高斯公式推論出來的焦距大小則偏向實驗方法後者，造成此一結果我們尚未找到原因，理論與實驗結果不同有許多可解釋的空間，但是前述我們找尋單一透鏡的焦距時證實此兩種方法準確率皆很高，透鏡組有此結果我們亦不得其解。

我們在網路上找到一篇 104 年於中學生網站獲獎的小論文，其內容寫到了雙透鏡的等效焦距公式，其推導的結果為等效焦距大小 = $\frac{\text{焦距}_{\text{透鏡1}} \times \text{焦距}_{\text{透鏡2}}}{\text{焦距}_{\text{透鏡1}} + \text{焦距}_{\text{透鏡2}} - \text{兩鏡片之距離}}$ ，若以此結論計算上述透鏡組的等效焦距，其結果為

	透鏡 1 之焦距	透鏡 2 之焦距	等效透鏡之焦距
凸凹透鏡	10	-10	22.22222222
凹凸透鏡	-10	10	22.22222222
凸凸透鏡	10	10	6.451612903

由此公式得到的焦距與上述我們的結果發現，凸凸透鏡的結果較為接近，但對於凸凹透鏡與凹凸透鏡而言，從公式得出焦距應該相同，但此與兩種實驗方法的實驗結果亦相悖，因此此計算方式應不完全正確。

陸、 結論

- 一、利用太陽光會聚法及凸透鏡虛像成像性質法皆可獲得凸透鏡的焦距，前者找尋焦點容易但因太陽光並非平行主軸入射，在定義焦平面時會造成較大的誤差；後者因為透鏡邊緣像差的關係定義焦點較不容易，但誤差小。
- 二、凹透鏡的焦距找尋許多資料都顯示利用視差法來獲得，但視差法觀察極不容易且極受人為因素影響，我們改用凹透鏡成像性質可找到焦距，雖因透鏡邊緣像差之故定義較不容易，但所得準確誤差小。

- 三、利用數學的直線方程式推導凸透鏡與凹透鏡的高斯公式，並利用蠟燭成像在光屏上實驗凸透鏡的焦距換算，實驗結果與實際值亦接近誤差小，故利用此法亦可準確的獲得凸透鏡的焦距。
- 四、透過凹透鏡與凸透鏡看物體運動的速度，從模擬的結果可看出當接近焦點或者遠離焦點時速率極大，距離越遠則速率趨近零，對比人眼的水晶體可視為一凸透鏡，當我們看遠方公車逼近時，越接近其速率越快即是此緣故。
- 五、透鏡組的實驗發想原是想將人眼佩戴近視眼鏡、遠視眼鏡做比對與討論，我們利用結論一的第二種方法與結論三的方法實驗兩片焦距皆為 10cm 的凹凸透鏡、距離 4.5cm 的透鏡組，並且用高斯公式計算獲得焦距，但是此兩種實驗方法獲得的結果有極大出入，且與用高斯公式計算所獲得者亦有出入，對於此實驗結果我們尚未找到答案，侷限於時間的關係將於未來繼續深入探討。
- 六、我們在中學生網站上找到 104 年獲甲等獎項的小論文，其內容提到兩片透鏡所形成的透鏡組其等效焦距可用一公式表示，但是我們所設定的凸凹透鏡組與凹凸透鏡組用此等效焦距公式獲得的結果有極大出入，因此此公式是否有其特定適用性或者此公式仍需做修正亦有待商榷。

柒、參考資料及其他

- 一、康軒版八年級自然與生活科學第三冊光學
- 二、中學生網站小論文第1041115 梯次得獎作品甲等，光學—透鏡淺談(東山高中江承翰、陳冠翔)
- 三、中華民國第 42 屆科展作品物理科透鏡白皮書