金門地區第五十八屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：數字之乾坤大挪移

關 鍵 詞：數字移位 位值

編　　號：

製作說明：

1. 說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
2. 編號由本縣科學展覽會承辦單位統一編列。
3. 封面編排由參展作者自行設計。

數字之乾坤大挪移

摘要

七年級下學期二元一次方程式常看到一道數學題目：「有一個二位數，它的數字和是 15，將它的個位數字與十位數字對調後，所得到的新數比原數大 27，求原數是多少？」。類似這樣的題目非常多，但都只侷限在二位數。我們想把它延伸到多位數，探討多位數同時有多個位數數字移位後，原數與新數之差的變化。

一、 研究動機:

當我們複習到七年級所學過的二元一次聯立方程式，有關二位數它的十位數與個位數數字對調的題目，在這類型的應用問題中，不論它的數字和是多少，然而陳述的新數比原數總是多 9、少 9、多 18、少 18、多 27、少 27…等，似乎就是這幾個特別的數字嗎？這引起我們的好奇想去了解二位數數字對調後，原數與新數的差是否有規律？然後，再深入去了解多位數數字對調的問題，我們想知道多位數的任意二個位數數字對調所產生的新數與原數之差是否有什麼規律存在?進一步研究更多個位數數字同時對調所產生的新數與原數之差是否也存在一些規律？

二、 研究目的:

找出數字經過重新排列(位數任意對調)後，原數與新數之差的規律性。

三、 研究工具:

紙、筆、電腦。

四、 研究內容:

(一)二個位數的調換

1. 二位數的實例與驗證

①十位數和個位數對調

原數	原數-新數
12	12-21=-9=9×(1-2)
47	47-74=-27=9×(4-7)
85	85-58=27=9×(8-5)

我們將十位數和個位數，分別設為 A 和 B，並且以 $\boxed{A}\,\boxed{B}$ 來表示這個二位數。即

原數：$\boxed{A}\ \boxed{B}=10A+B$

新數：$\boxed{B}\ \boxed{A}=10B+A$

原數-新數：$\boxed{A}\ \boxed{B}-\boxed{B}\ \boxed{A}=(10A+B)-(10B+A)=9A-9B=9(A-B)$

由此可知，原數與新數之差等於 9 乘上原數的十位減個位。

2.三位數的實例與驗證

①十位數和個位數對調

原數	原數-新數
125	125-152=-27=9×(2-5)
164	164-146=18=9×(6-4)
178	178-187=-9=9×(7-8)

將百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}=10^2A+10B+C$

$\boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{B}=10^2A+10C+B$

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}-\boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{B}=(10^2A+10B+C)-(10^2A+10C+B)=9B-9C=9(B-C)$

由此可知，原數與新數之差等於 9 乘上原數的十位減個位。

②百位數和十位數對調

原數	原數-新數
125	125-215=-90=90×(1-2)
164	164-614=-450=90×(1-6)
178	178-718=-540=90×(1-7)

將百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}=10^2A+10B+C$

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C}=10^2B+10A+C$

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}-\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C}=(10^2A+10B+C)-(10^2B+10A+C)=90A-90B=90(A-B)$

由此可知，原數與新數之差等於 90 乘上原數的百位減十位。

③百位數和個位數對調

原數	原數-新數
125	125-521=-396=99×(1-5)
164	164-461=-297=99×(1-4)
178	178-871=-693=99×(1-8)

將百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}=10^2A+10B+C$

$\boxed{C}\ \boxed{B}\ \boxed{A}=10^2C+10B+A$

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}-\boxed{C}\ \boxed{B}\ \boxed{A}=(10^2A+10B+C)-(10^2C+10B+A)=99A-99C=99(A-C)$

由此可知，原數與新數之差等於 99 乘上原數的百位減個位。

3. 四位數的實例與驗證

①十位數和個位數對調

原數	原數-新數
1215	1215-1251=-36=9×(1-5)
3124	3124-3142=-18=9×(2-4)
1534	1534-1543=-9=9×(3-4)

將千位數、百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C、D。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}=10^3A+10^2B+10C+D$

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{D}\ \boxed{C}=10^3A+10^2B+10D+C$

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}-\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{D}\ \boxed{C}=(10^3A+10^2B+10C+D)-(10^3A+10^2B+10D+C)$

$=9C-9D=9(C-D)$

由此可知，原數與新數之差等於 9 乘上原數的十位減個位。

②百位數和個位數對調

原數	原數-新數
1215	1215-1512=-297=99×(2-5)
3124	3124-3421=-297=99×(1-4)
1534	1534-1435=99=99×(5-4)

將千位數、百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C、D。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}=10^3A+10^2B+10C+D$

$\boxed{A}\ \boxed{D}\ \boxed{C}\ \boxed{B}=10^3A+10^2D+10C+B$

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}-\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{D}\ \boxed{C}=(10^3A+10^2B+10C+D)-(10^3A+10^2D+10C+B)$

$=99B-99D=99(B-D)$

由此可知，原數與新數之差等於 99 乘上原數的百位減個位。

③千位數和個位數對調

原數	原數-新數
1215	1215-5211=-3996=999×(1-5)
3124	3124-4123=-999=999×(3-4)
1534	1534-4531=-2997=999×(1-4)

將千位數、百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C、D。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}=10^3A+10^2B+10C+D$

$\boxed{D}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{A}=10^3D+10^2B+10C+A$

$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}-\boxed{D}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{A}=(10^3A+10^2B+10C+D)-(10^3D+10^2B+10C+A)=999A-999D=999(A-D)$

由此可知，原數與新數之差等於 999 乘上原數的千位減個位。

④百位數和十位數對調

原數	原數-新數
1215	1215-1125=90=90×(2-1)
3124	3124-3214=-90=90×(1-2)
1534	1534-1354=-180=90×(5-3)

將千位數、百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C、D。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}=10^3A+10^2B+10C+D$

$\boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{B}\ \boxed{D}=10^3A+10^2C+10B+D$

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}-\boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{B}\ \boxed{D}=(10^3A+10^2B+10C+D)-(10^3A+10^2C+10B+D)$

$=90B-90C=90(B-C)$

由此可知，原數與新數之差等於 90 乘上原數的百位減十位。

⑤千位數和十位數對調

原數	原數-新數
1215	1215-1215=0=990×(1-1)
3124	3124-2134=990=990×(3-2)
1534	1534-3514=-1980=990×(1-3)

將千位數、百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C、D。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}=10^3A+10^2B+10C+D$

$\boxed{C}\ \boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{D}=10^3C+10^2B+10A+D$

$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}-\boxed{C}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{D}=(10^3A+10^2B+10C+D)-(10^3C+10^2B+10A+D)=990A-990C=990(A-C)$

由此可知，原數與新數之差等於 990 乘上原數的千位減十位。

⑥千位數和百位數對調

原數	原數-新數
1215	1215-2115=-900=900×(1-2)
3124	3124-1324=1800=900×(3-1)
1534	1534-5134=-3600=900×(1-5)

將千位數、百位數、十位數和個位數，分別設為 A、B、C、D。

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}=10^3A+10^2B+10C+D$

$\boxed{B}\ \boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{D}=10^3B+10^2A+10C+D$

$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}-\boxed{B}\boxed{A}\boxed{C}\boxed{D}=(10^3A+10^2B+10C+D)-(10^3B+10^2A+10C+D)=900A-900B=900(A-B)$

由此可知，原數與新數之差等於 900 乘上原數的千位減百位。

推廣到 n 位數字的某二個位數對調，假設原數為一個有 n 位數的數字，若個位數我們稱為第 1 位數，並且以 A_1 來表示它的數字；十位數稱為第 2 位數，並且以 A_2 來表示它的數字；依次類推…，A_n 為第 n 位數的數字。即

$\boxed{A_n}\ \boxed{A_{n-1}}\boxed{A_{n-2}}\ \cdots\ \boxed{A_2}\ \boxed{A_1}= A_n\times10^{n-1}+A_{n-1}\times10^{n-2}+A_{n-2}\times10^{n-3}+\cdots+A_2\times10^1+A_1$

其第 h 位數的數字與第 k 位數的數字對調(其中 h>k)，則

$$\begin{aligned}原數-新數&=(A_h\times10^{h-1}+A_k\times10^{k-1})-(A_h\times10^{k-1}+A_k\times10^{h-1})\\&=A_h\times(10^{h-1}-10^{k-1})+A_k\times(10^{k-1}-10^{h-1})\\&=(A_h-A_k)\times(10^{h-1}-10^{k-1})\\&=(A_h-A_k)\times9\cdots90\cdots0\quad(有\ h-k\ 個\ 9、k-1\ 個\ 0)\end{aligned}$$

(二)多個位數的調換

若 n 位數同時有多個位數調換呢？

我們先以一些實例來看看三、四位數調換後的情形：

1.三位數的實例（三個位數均調換）

原數	新數	原數-新數
518	185	518-185=333=37×9
	851	518-851=-333=-37×9
234	342	234-342=-108=-12×9
	423	234-423=-189=-21×9

2.四位數的實例

①有三個位數調換，但仍有一個位數未調換：

原數	新數	原數-新數
6518	6185	6518-6185=333=37×9
	6851	6518-6851=-333=-37×9
5618	1685	5618-1685=3933=437×9
	8651	5618-8651=-3033=-337×9
5168	1865	5168-1865=3303=367×9
	8561	5168-8561=-3393=-377×9

②四個位數均調換：

原數	新數	原數-新數
2385	3258	2385-3258=-873=-97×9
	3852	2385-3852=-1467=-163×9
	3528	2385-3528=-1143=-127×9
	8253	2385-8253=-5868=-652×9
	8523	2385-8523=-6138=-682×9
	8532	2385-8532=-6147=-683×9
	5238	2385-5238=-2853=-317×9
	5823	2385-5823=-3438=-382×9
	5832	2385-5832=-3447=-383×9

我們先將一數字的某個位數，經調換後數值的變化情形，整理成下表：

原數的某位數	調換至新數的某位數後的數值	調換後的數值的變化情形(原值-新值)
第 1 位數，即個位數 A_1 其值為 A_1	個位數：A_1	0
	十位數：$A_1\times10^1$	$A_1-A_1\times10^1=-(10^1-1)A_1=-9A_1$
	百位數：$A_1\times10^2$	$A_1-A_1\times10^2=-(10^2-1)A_1=-99A_1$
	…	…
	第 n 位數：$A_1\times10^{n-1}$	$A_1-A_1\times10^{n-1}=-(10^{n-1}-1)A_1$ $=-99\cdots9A_1$ （有 n-1 個 9）
第 2 位數，即十位數 A_2 其值為 $A_2\times10^1$	個位數：A_2	$A_2\times10^1-A_2=(10^1-1)A_2=9A_2$
	十位數：$A_2\times10^1$	0
	百位數：$A_2\times10^2$	$A_2\times10^1-A_2\times10^2=-(10^1-1)\times10^1A_2=-90A_2$
	…	…
	第 n 位數：$A_2\times10^{n-1}$	$A_2\times10^1-A_2\times10^{n-1}=-(10^{n-2}-1)\times10^1A_2$ $=-9\cdots90A_2$ （有 n-2 個 9）
第 3 位數，即百位數 A_3 其值為 $A_3\times10^2$	個位數：A_3	$A_3\times10^2-A_3=(10^2-1)A_3=99A_3$
	十位數：$A_3\times10^1$	$A_3\times10^2-A_3\times10^1=(10^1-1)\times10^1A_3=90A_3$
	百位數：$A_3\times10^2$	0
	…	…
	第 n 位數：$A_3\times10^{n-1}$	$A_3\times10^2-A_3\times10^{n-1}=-(10^{n-3}-1)\times10^2A_3$ $=-9\cdots900$（有 n-3 個 9）

<table>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td rowspan="9">第 n 位數 A_n
其值為 $A_n\times10^{n-1}$</td><td>個位數：A_n</td><td>$A_n\times10^{n-1}-A_n=(10^{n-1}-1)A_n$
$=99\cdots9A_n$ （有 n−1 個 9）</td></tr>
<tr><td>十位數：$A_n\times10^{1}$</td><td>$A_n\times10^{n-1}-A_n\times10^{1}=(10^{n-2}-1)\times10^{1}A_n$
$=99\cdots0A_n$ （有 n−2 個 9）</td></tr>
<tr><td>百位數：$A_n\times10^{2}$</td><td>$A_n\times10^{n-1}-A_n\times10^{2}=(10^{n-3}-1)\times10^{2}A_n$
$=9\cdots900A_n$ （有 n−3 個 9）</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>第 k 位數：$A_n\times10^{k-1}$</td><td>$A_n\times10^{n-1}-A_n\times10^{k-1}=(10^{n-k}-1)\times10^{k-1}A_n$
$=9\cdots90\cdots0A_n$
（有 n−k 個 9、k−1 個 0）</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>第 n−1 位數：$A_n\times10^{n-2}$</td><td>$A_n\times10^{n-1}-A_n\times10^{n-2}=(10-1)\times10^{n-2}A_n$
$=90\cdots0A_n$ （有 n−2 個 0）</td></tr>
<tr><td>第 n 位數：$A_n\times10^{n-1}$</td><td>0</td></tr>
</table>

我們利用上表來驗證三位數、四位數調換後，原數−新數的差的變化情形：

①原數=234，新數=342

原數的百位數 2，調整到新數的個位數，其值變化為 $2\times(100-1)=2\times99$

原數的十位數 3，調整到新數的百位數，其值變化為 $3\times(10-100)=3\times(-90)$

原數的個位數 4，調整到新數的十位數，其值變化為 $4\times(1-10)=4\times(-9)$

所以原數−新數 $=2\times99+3\times(-90)+4\times(-9)=9\times(2\times11-3\times10-4)$

②原數=6518，新數=6185，

原數的百位數 5，調整到新數的個位數，其值變化為 $5\times(100-1)=5\times99$

原數的十位數 1，調整到新數的百位數，其值變化為 $1\times(10-100)=1\times(-90)$

原數的個位數 8，調整到新數的十位數，其值變化為 $8\times(1-10)=8\times(-9)$

所以原數−新數 $=5\times99+1\times(-90)+8\times(-9)=9\times(5\times11-1\times10-8)$

③原數=2385，新數=5238，

原數的千位數 2，調整到新數的百位數，其值變化為 $2\times(1000-100)=2\times900$

原數的百位數 3，調整到新數的十位數，其值變化為 $3\times(100-10)=3\times90$

原數的十位數 8，調整到新數的個位數，其值變化為 $8\times(10-1)=8\times9$

原數的個位數 5，調整到新數的千位數，其值變化為 $5\times(1-1000)=5\times(-999)$

所以原數−新數 $=2\times900+3\times90+8\times9+5\times(-999)=9\times(2\times100+3\times10+8-5\times111)$

推廣到 n 位數字的同時有多個位數對調，假設原數為

$\boxed{A_n}\ \boxed{A_{n-1}}\boxed{A_{n-2}}\ \cdots\ \boxed{A_2}\ \boxed{A_1} = A_n\times10^{n-1}+A_{n-1}\times10^{n-2}+A_{n-2}\times10^{n-3}+\cdots+A_2\times10^{1}+A_1$

並且以 S(n)來表示原數的第 n 位數調整到新數的位數。

（即：原數的第 k 位數，調到新數的第 S(k)位數，…，同理類推）

原數−新數=$A_n\times(10^{n-1}-10^{S(n)})+A_{n-1}\times(10^{n-2}-10^{S(n-1)})+\cdots+A_2\times(10-10^{S(2)})+A_1\times(1-10^{S(1)})$

$$\because 10^h-10^k=\begin{cases}9\ldots90\ldots0\text{，共 }h-k\text{ 個 }9\text{，}k\text{ 個 }0 & \text{當 }h>k\\ 0 & \text{當 }h=k\\ -9\ldots90\ldots0\text{，共 }k-h\text{ 個 }9\text{，}h\text{ 個 }0 & \text{當 }h<k\end{cases}$$

$\therefore 10^h-10^k$ 必為 9 的倍數

因此，原數−新數的差也必為 9 的倍數。

五、　研究結論：

(一)若某一個數的第 h 位數的數字與第 k 位數的數字對調(其中 h>k)，
　　則原數−新數的差必為 9…90…0 的倍數 (有 h-k 個 9、k-1 個 0)。

(二)將某一個數的位數任意對調，則原數−新數的差必為 9 的倍數。

六、　參考資料：

(一)國中數學第二冊、第五冊。康軒文教事業。

(二)數學思考。九章出版社。