金門地區第五十八屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：數學裡的萬里長城

--連續數的美

關 鍵 詞：連續數　畢氏定理

編　　號：

製作說明：

1. 說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
2. 編號由本縣科學展覽會承辦單位統一編列。
3. 封面編排由參展作者自行設計。

摘　　　要

本研究主要是探討「連續數的美」，主要的內容分成三部分：什麼樣條件的數一定會有連續數? 什麼樣的數一定沒有連續數? 類似畢氏定理的連續數要如何尋找? 我們將可以找到連續數的數字歸類，發現有奇數、質數(2 除外)、三角形數、3 的倍數；無法寫成連續數的數為 2 的乘方數。我們也找到一些規律可以去尋找類似畢氏定理的連續數，如：$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2$，也發現了連續數平方和中的連續數。

壹、研究動機

一、在某一次老師拿給我們一道資優班的數學題目讓我們思考：

請問下列各數何者能表示成連續 100 個正整數? (1)1627384950 (2)2345678910 (3)4692581470 (4)3579111300 (5)5815937260。

這是我們第一次看到連續數的題目，也激起我們的好奇心，想要窺視一下連續數的世界。因此，著手研究連續數的美麗。

二、在數學課本第四冊 1-2 等差級數中，如果公差是 1，那就是所謂的連續數。連續數的和是一種等差級數，剛好有研究這個主題的背景知識。

貳、研究目的

一、奇數一定可以找到兩個以上連續數的和。
二、質數(2 除外)一定可以找到兩個以上連續數的和。
三、三角形數一定可以找到兩個以上連續數的和。
四、2 的乘方數無法找到兩個以上連續數的和，其餘的數都可以找到兩個以上連續數的和。
五、如何快速的找到類似畢氏定理形式，連續數平方和的規律。

參、研究設備及器材

紙、筆

肆、研究過程或方法

我們將 2~50 這些數試著將它們寫成連續正整數的和，以下是我們找到的結果：

2=無法
3=1+2
4=無法
5=2+3
6=1+2+3
7=3+4
8=無法
9=4+5

10=1+2+3+4

11=5+6

12=3+4+5

13=6+7

14=2+3+4+5

15=7+8

16=無法

17=8+9

18=5+6+7

19=9+10

20=2+3+4+5+6

21=10+11

22=4+5+6+7

23=11+12

24=7+8+9

25=12+13

26=5+6+7+8

27=13+14

28=1+2+3+4+5+6+7

29=14+15

30=9+10+11

31=15+16

32=無法

33=16+17

34=7+8+9+10

35=17+18

36=11+12+13

37=18+19

38=8+9+10+11

39=19+20

40=6+7+8+9+10

41=20+21

42=13+14+15

43=21+22

44=2+3+4+5+6+7+8+9

45=22+23

46=10+11+12+13

47=23+24

48=15+16+17

49=24+25

50=11+12+13+14

我們將 2~50 所有的奇數挑出來，呈現出以下的規律：

3=1+2	5=2+3	7=3+4	9=4+5	11=5+6	13=6+7
15=7+8	17=8+9	19=9+10	21=10+11	23=11+12	25=12+13
27=13+14	29=14+15	31=15+16	33=16+17	35=17+18	37=18+19
39=19+20	41=20+21	43=21+22	45=22+23	47=23+24	49=24+25

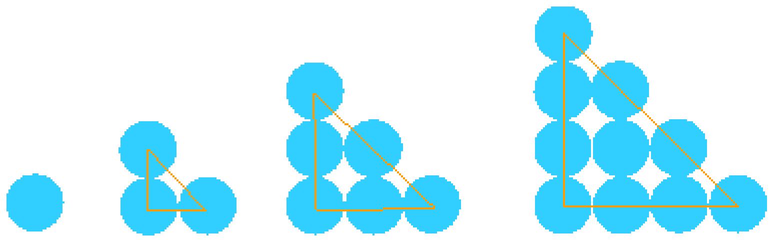
從以上的觀察我們可以發現 2~50 的數中只要是奇數，一定可以寫成兩個(或以上)的連續整數和，但所有的奇數都會成立嗎?

我們知道奇數(1 不算)可以假設為 2n+1(n 為正整數)，2n+1 可以寫成 n+(n+1)　，即 2n+1=n+(n+1)，故奇數一定可以寫成兩個(或以上)正整數的和。

談到奇數我們聯想到質數，所有的質數都是奇數(2 除外)，因此質數也一定可以寫成兩個(或以上)連續正整數的和。

我們直覺的思考到連續正整數的和，那就是 1+2、1+2+3、1+2+3+4、1+2+3+4+5，因此 3、6、10、15 都可以寫成連續正整數的和，而 1、3、6、10、15 不就是三角形數嗎？所以，三角形數一定可以寫成連續正整數的和。

三角形數



偶數中有些可以寫成連續正整數的和，有些卻無法寫成連續正整數的和，我們把 2~50 之中可以跟無法寫出來，如以下所示：

可以寫成連續正整數的和有：6、10、12、14、18、20、22、24、26、28、30、34、36、38、40、42、44、46、48、50。

不可以寫成連續正整數的和有：2、4、8、16、32。

我們發現不可以寫成連續正整數的和是以 2 為首 2 的倍數的數，也就是 2 的乘方，如$2 = 2^1$、$4 = 2^2$、$8 = 2^3$、$16 = 2^4$、$32 = 2^5$。

我們將可以寫成連續正整數和的數分成寫成3個連續正整數和及超過3個連續正整數和，整理如下：

寫成 3 個連續正整數和有：6、12、18、24、30、36、42、48。

寫成超過 3 個連續正整數和有：10、14、20、22、26、28、34、38、40、44、46、50。

我們發現可以寫成 3 個連續正整數和的都是 3 的倍數，我們假定 3 的倍數為 $3k(k \geq 2)$，這三個連續數為 k-1、k、k+1，3k=k-1+k+k+1，故 3 的倍數一定可以寫成連續正整數的和。

到目前為止，我們已經能夠證明奇數一定可以寫成連續數的和，3 的倍數也一定可以寫成連續數的和，但只是觀察到 2 的乘方數一定無法寫成連續數的和，還尚未證明其一般性。還有超過 50 以上的數(非 2 的乘方數)都可以寫成連續數的和嗎？

我們試著用 1-2 等差級數的內容所學來證明這個觀察結論：

假設有一個數 S，這個數可以寫成 x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+⋯+(x+n)，如

$$S= x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+\cdots+(x+n)=\frac{(x+x+n)(n+1)}{2} = \frac{(2x+n)(n+1)}{2}$$

得到 $2S=(2x+n)(n+1)$。

我們知道(2x+n)(n+1)為偶數，分三個情形討論：

情形一：(2x+n)是偶數，(n+1)是奇數，合理。

情形二：(2x+n)是奇數，(n+1)是偶數，合理。

情形三：(2x+n)是偶數，(n+1)是偶數，不合理。

我們得知，(2x+n)、(n+1)有一個是奇數，有一個是偶數。

如果 S 是 2 的乘方數，得到 $S=2^t$，$2^{t+1} = (2x+n)(n+1)$，兩邊同時一直除以 2，等式左邊還是偶數，但是右邊會剩下奇數，偶數≠奇數，故假設矛盾，所以 2 的配方數無法寫成連續整數的和。

如果 S 不是 2 的乘方數，得到 $S=m2^t$，m 為奇數，$m2^{t+1} = (2x+n)(n+1)$，

此方程式合理。所以，我們可以找到 S= x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+⋯+(x+n)。

看到這樣的連續數我們想到了之前學過的畢氏定理$3^2+4^2=5^2$，那麼會不會再有一組連續數使得$(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$成立。將$(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$展開得到$x^2-2x+1+x^2=x^2+2x+1$，$x^2-4x=0$，$x=4$ or 0(不合)，只有$3^2+4^2=5^2$這組而已。

那麼我們不禁想會不會有一組正整數滿足$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2$，(a、b、c、d、e 為連續數)，我們假設 a=x、b=x+1、c=x+2、d=x+3、e=x+4，帶入方程式$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2$，得到$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$，$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9+x^2+8x+16$，化簡之後得到$x^2-8x-20=0$，x=10 or -2(不合)，找到一組解$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$。這樣的結果讓我們振奮人心，迫不急待的找下一組解。

假設有一組正整數滿足$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2$，(a、b、c、d、e、f、g 為連續數)，我們假設 a=x、b=x+1、c=x+2、d=x+3、e=x+4、f=x+5、g=x+6，帶入方程式$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2$，得到$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=(x+4)^2+(x+5)^2+(x+6)^2$，$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4+x^2+6x+9=x^2+8x+16+x^2+10x+25+x^2+12x+36$，化簡之後得到$x^2-18x-63=0$，x=21 or -3(不合)，找到一組解$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$。

我們推測應該會有一組正整數解滿足$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2+g^2+h^2+i^2$，(a、b、c、d、e、f、g、h、i 為連續數)，但如果每一組解都假設 x 去解未知數，這樣的功夫太龐大了，我們試著找尋其規律。

第一組開頭為 3，第二組開頭為 10，第三組開頭為 21，那樣第四組呢？我們發覺 3 和 10 相差 7，10 和 21 相差 11，那會不會 21 和下一個數相差 15 呢？很快的我們將這大膽的想法做出運算，得到$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$。

3、10、21

7　11

4

有了這樣的猜想，我們猜下一組的開頭應該是 55，得到$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$。

我們試著想想看是否還有其他種方法來找到開頭這一個數，3、10、21、36、55 是否有其他規律可以找到下一個數。我們發現：3=1×3、10=2×5、21=3×7、36=4×9、55=5×11，那麼下一個開頭不就是應該為 6×13=78 嗎？

3=1×3
10=2×5
21=3×7
36=4×9
55=5×11

我們試著計算看看，發現$78^2+79^2+80^2+81^2+82^2+83^2+84^2=85^2+86^2+87^2+88^2+89^2+90^2$會成立。原來將開頭這個數經過分解後，第一列的數竟然也是一串連續數，第二列的數為首項是 3 公差為 2 的數。這樣的結論讓我們驚艷，如果要算第 100 組的數就是將 100×(2‧100 + 1)=20100。這樣的分析方法更符合連續數的美，連續數平方和中又能找到連續數這個元素，數字的美讓我們讚嘆不已。

為什麼會有這樣的規律，我們試著用代數式解解看：假設左邊有 n+1 個數，右邊就會有 n 個數，得到$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\cdots+(x+n)^2=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+(x+n+3)^2+\cdots+(x+n+n)^2$，將右邊寫成$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\cdots+(x+n)^2=(x+1+n)^2+(x+2+n)^2+(x+3+n)^2+\cdots+(x+n+n)^2$，兩邊展開得到$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\cdots+(x+n)^2=(x+1)^2+2n(x+1)+n^2+(x+2)^2+2n(x+2)+n^2+(x+3)^2+2n(x+3)+n^2+\cdots+(x+n)^2+2n(x+n)+n^2$，化簡之後得到$x^2-2n(x+1+x+2+x+3+\cdots+x+n)-n^3=0$，得到$x^2-2n\left(nx+\frac{(n+1)n}{2}\right)-n^3=0$，得到$x^2-2xn^2-2n^3-n^2=0$，下一步$x^2-2xn^2-n(2n^2+n)=0$，分解成$(x-2n^2-n)(x+n)=0$，得到 x 的解為$x=2n^2+n$ or $x=-n$ (不合)，故$x=2n^2+n$。

再將$x=2n^2+n$分解為$x=n(2n+1)$，所以才會得到第一列的數是連續數，第二列的數是奇數。

伍、研究結果

一、奇數、質數(2 除外)、三角形數、3 的倍數一定可以寫成連續數的和。
二、2 的乘方數無法寫成連續數的和，其餘的數都可以。
三、可以找的到無限多組類似畢氏定理的連續平方數。

陸、討論

一、 一開始我們並沒有想到有這麼多數可以寫成連續數的和，總感覺是巧合，但深入研究之後發現竟然只有 2 的乘方數無法寫成連續數的和，其餘的數都可以，讓我們難以想像。質數是個神祕的數，現在還無法找到質數的盡頭，但它卻都可以寫成連續數的和(2 除外)，當然理論不難，但我們卻從來沒有去想過。三角形數的定義可以轉換成連續數的和，這個很好理解。3 的倍數可以寫成連續數的和，這也不難理解。

二、 2 的乘方數無法寫成連續數的和，這個發現不難，只是證明讓我們花了不少時間找資料及思考。利用矛盾證法去證明 2 的乘方數無法寫成連續數的和。找到 $S=2^{t}$，$2^{t+1}=(2x+n)(n+1)$，利用偶數不等於奇數而證之。

其餘的數都可以寫成連續數的和，雖然有證明出來，但是這個結果還是讓我們難以置信。當然，我們有發現部分數字可以寫成的連續數並不唯一，這可以當作我們下次研究的方向。

三、 我們也嘗試著去找類似畢氏定理的連續數，也發現可以找到無限多組這樣的方程式，這也是我們當初沒有料想到的，到現在我們還覺得不是挺真實的，但經過證明只要開頭的數可以寫成$x=n(2n+1)$這樣的形式就可以寫成連續數平方和，這樣得結果真的挺有趣的。未來還可以研究三次方連續數的和，我們相信結果應該也會很有趣。

柒、參考資料及其他

一、 康軒文教事業。國中數學第四冊 1-2 等差級數。
二、 天下文化。神奇數學 117。
三、 連續正整數平方和的有趣等式。isdp2008am 隨意窩。