金門地區第６０屆中小學科學展覽會作品說明書

科別：數學

組別：國小組

作品名稱：你的眼睛出賣你的心

關鍵詞：(最多三個)算數、魔術、規律性

編號：

目錄

壹、 摘要

這次科展主要是由一個魔術演變而來的，魔術的內容是請觀眾在心中想一個四位數，再將這四位數隨意排列成一組新數字，並將這兩組四位數字以大減小的方式互減得到答案，最後請觀眾將答案結果遮住一個不為零的數，然後我們就能輕鬆地猜出那張被遮住的數字是多少。

貳、 研究動機

以前總是認為魔術是騙人的，不然就是需要手法才能變，要練習很久才能有所成就，直到有一天在數學課的時候，老師變了一個很神奇的魔術。老師竟然可以輕易猜出我們蓋住的數字，真的是很神奇，但這使我們百思不解，這究竟是什麼原因，因此也引起了我們的好奇心，於是我們常常利用下課時間請教老師，老師跟我們說，這個魔術其實跟我們正在學的數學單元”因數與倍數”有關係，我們覺得很神奇，原來學數學也可以變魔術，而且老師說過，數學就是要會找規律，所以我們利用空閒時間聚在一起互相討論，並交換意見，希望可以找出這個魔術的規律及破解方法。

而以下是魔術的步驟：

一、首先請在心中想一組四位數。

二、接下來請將這組數字隨意排列成一組新的四位數。例如 1234 就把它排列成 3421。

三、再將大的數字減掉小的數字得到一個答案。

四、將答案蓋住一個數字不為 0 的數，告訴我們剩下的總和（假設減出的答案是 6912，觀眾把 1 蓋住，告訴我們總和是 6+9+2=17）。

五、我們就可以猜出蓋住的數字是多少了。

參、 研究目的

一、找出魔術規律，研究它的原理。

二、利用這個魔術做延伸，希望可以延伸出以下這個假設，如果將四位數改成五位數或六位數以上魔術也都可以變成功。

肆、 研究設備及器材

一、相機

二、紙

三、筆

四、計算機

四位數	新四位數	大數減小數的結果				其中三數總和	蓋住的數字

伍、 研究過程及方法

一、實際試變並做結果的紀錄：

以下是我們製作的魔術紀錄表，並說明我們是如何使用紙筆紀錄魔術的過程。

四位數	新四位數	大數減小數的結果				剩下數字的總和	擋住的數字

（一）如何判讀魔術紀錄表

1.首先可以知道一開始觀眾所想到的數字。

2.再來可以知道大減小之後的數字。

3.知道擋住的數字以及剩下數字的總和。

4.透過記錄表可以找尋魔術的規律。

（二）實際做紀錄

表一							
四位數	新四位數	大數減小數的結果				剩下數字的總和	擋住的數字
9901	9910				9	0	9
9918	9198		7	2	0	7	2

表一							
四位數	新四位數	大數減小數的結果				剩下數字的總和	擋住的數字
8549	9854	1	3	0	5	1	8
9854	8549	1	3	0	5	6	3
9852	9528		3	2	4	5	4
8751	7581		1	1	7	2	7
9817	8791	1	0	2	6	3	6
8549	9854	1	3	0	5	4	5

我們從表一的結果發現了一個規律，就是剩下數的總和和觀眾擋住的數字加起來剛好會等於9，難道 9 是魔術的關鍵所在？所以我們就繼續試下去。

表二							
四位數	新四位數	大數減小數的結果				剩下數字的總和	擋住的數字
6174	7146		9	7	2	16	2

表二							
四位數	新四位數	大數減小數的結果				剩下數字的總和	擋住的數字
6542	2456	4	0	8	6	12	6
3012	1230	1	7	8	2	10	8
8519	9158		6	3	9	9	9
2409	9240	6	8	3	1	15	3
9955	5599	4	3	5	6	14	4
5237	3752	1	4	8	5	17	1
9167	7196	1	9	7	1	11	7
8844	4488	4	3	5	6	13	5

我們從表二的結果發現了一個規律，就是剩下數的總和和觀眾擋住的數字加起來剛好會等於18，而 18=9X2，難道 9 是魔術的關鍵所在？所以我們就繼續試下去。

表三							
四位數	新四位數	大數減小數的結果				剩下數字的總和	擋住的數字
8115	5118	2	9	9	7	25	2
1519	9115	7	5	9	6	21	6
9123	1239	7	8	8	4	23	4
8225	5228	2	9	9	7	20	7
9335	5339	3	9	9	6	24	3
9112	1129	7	9	8	3	19	8
9113	1139	7	9	7	4	18	9
1519	9115	7	5	9	6	22	5

我們從表二的結果發現了一個規律，就是剩下數的總和和觀眾擋住的數字加起來剛好會等於27，而 27=9X3，難道 9 是魔術的關鍵所在？

而我們記得老師在上倍數關係的時候有跟我們提過倍數的規律：

2 的倍數規律：只要個位數字是偶數，這個數就會是 2 的倍數。

5 的倍數規律：只要個位數字是 0 或 5，這個數就會是 5 的倍數。

10 的倍數規律：只要個位數字是 0，這個數字就會是 10 的倍數。

3 的倍數規律：若一個正整數的各個數字和是 3 的倍數，則這個正整數就是 3 的倍數

我們對 3 的倍數規律特別有興趣，因為判別的方法特別不一樣，如果將各個數字和加起來是 3 的倍數，則這個正整數就是 3 的倍數。

這個魔術的規律跟 3 的倍數規律很像，只是將數字換成 9，以下是我們的想法

1.找出 9 的倍數規律。

2.證明四位數及新四位數大減小後的答案會是 9 的倍數。

二、9 的倍數規律

我們已經知道 3 的倍數規律，假設這個數字是四位數 abcd，將這個數字 abcd 的每一位數字加總起來，也就是 a+b+c+d，只要總和是 3 的倍數，這個四位數 abcd 就會是 3 的倍數。

接來我們利用代數 abcd 來嘗試尋找 9 的倍數規律。

abcd＝1000*a+100*b+10*c+1*d

（我們先將 abcd 利用各個位數的方式展開）

＝(999+1)*a+(99+1)*b+(9+1)*c+1*d

（然後將 1000 拆成 999+1，100 拆成 99+1，10 拆成 9+1）

＝999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d

（然後把括號展開）

＝999*a+99*b+9*c+a+b+c+d

（將算式整理一下）

＝9*(111*a+11*b+1*1)+(a+b+c+d)－（α）

（提出 9 這個公因數，我們將結果訂為多項式（α））

最後我們得到了這個多項式，我們發現 9*(111*a+11*b+1*c)這個多項式，它是一個 9 乘以任何一個整數，而它一定會是 9 的倍數，所以我們可以把

abcd=9*(111*a+11*b+1*c)+(a+b+c+d)=α ，看成α=9 的倍數+(a+b+c+d)，如果我們能確定(a+b+c+d)也是 9 的倍數， α就會變成 9 的倍數+9 的倍數，就可以得證α會是 9 的倍數。

三、試著將一個四位數字利用代數來做分解

我們利用代數表示一個四位數 abcd，而 abcd=1000*a+100*b+10*c+1*d，顛倒後的四位數為 dcba=1000*d+100*c+10*b+1*a，接下來我們就利用這兩個數字做相減，來找規律。

四、利用代數將一個顛倒後組成的兩個四位數相減，結果是否為 9 的倍數

abcd-dcba=(1000*a+100*b+10*c+1*d)-(1000*d+100*c+10*b+1*a)

=[(999+1)*a+(99+1)*b+(9+1)*c+1*d]

-[(999+1)*d+(99+1)*c+(9+1)*b+1*a]

=[999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d]

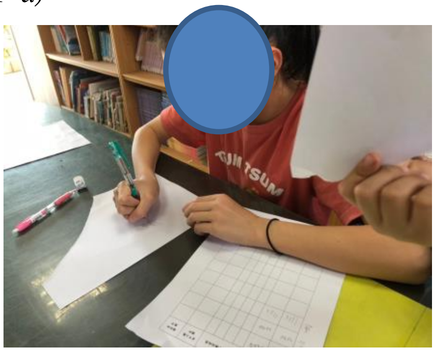
-[999*d+1*d+99*c+1*c+9*b+1*b+1*a]

=999a+a+99b+b+9c+c+d-999d-d-99c-c-9b-b-a

=999a+90b-90c-999d

=9*111a+9*10b-9*10c-9*111d

=9*(111a+10b-10c-111d)－（β）



多項式β是我們最後的計算結果，我們同樣發現 9 乘以任何一個整數，結果都一定會是 9 的倍數，所以我們可以確定（β）一定是 9 的倍數，因此我們可以往前推論，由於 abcd-dcba=9*(111a+10b-10c-111d)－（β），所以我們可以知道 abcd-dcba 也一定會是 9 的倍數。

五、假設 abcd-dcba 的結果為 wxyz

經由研究 3 的過程我們可以知道 abcd-dcba 的結果一定會是 9 的倍數，我們假設最後相減的數字為 wxyz 而 wxyz 是 9 的倍數。

再經由研究 1，我們可以知道，如果要確定這個數字是否為 9 的倍數，只要將這個數字各個位數的數字加總起來，只要加總的結果是 9 的倍數，這個數字就一定會是 9 的倍數，因此我們可以知道 w+x+y+z 的加總結果一定會是 9 的倍數。

六、我們接下來測試亂數排列做相減的結果，來實驗是否正確。

（一） 實驗 1.abcd-badc=(1000*a+100*b+10*c+1*d)

-(1000*b+100*a+10*d+1*d)

=(999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d)

-(999*b+1*b+99*a+1*a+9*d+1*d+1*c)

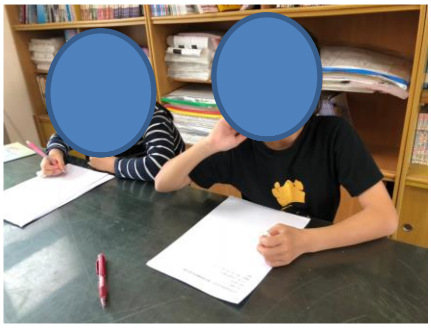
=(999a+1a+99b+1b+9c+1c+1d)

-999b-1b-99a-1a-9d-1d-1c

=999a+90b-999b-90a

=9*111a+9*10b-9*111b-9*10a

=9*(111a+10b-111b-10a)



經由計算，我們可以得到實驗（一）abcd-badc 的結果會是 9 的倍數。

（二） 實驗 2.abcd-cdba=(1000*a+100*b+10*c+1*d)

-(1000*c+100*d+10*b+1*a)

=(999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d)

-(999*c+1*c+99*d+1*d+9*b+1*b+1*a)

=(999a+1a+99b+1b+9c+1c+1d)

-999c-1c-99d-1d-9b-1b-1a

=999a+90b-999c-90d

=9*111a+9*10b-9*111c-9*10d

=9*(111a+10b-111c-10d)

經由計算，我們可以得到實驗（二）abcd-cdba 的結果會是 9 的倍數。

（三） 實驗 3.abcd-dbac=(1000*a+100*b+10*c+1*d)

-(1000*d+100*b+10*a+1*c)

=(999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d)

-(999*d+1*d+99*b+1*b+9*a+1*a+1*c)

=(999a+1a+99b+1b+9c+1c+1d)

-999d-1d-99b-1b-9a-1a-1c

=900a+9c-900d-9a

=9*100a+9*1c-9*100d-*-9*1a

=9*(100a+1c-100d-1a)

經由計算，我們可以得到實驗（三）abcd-dbac 的結果會是 9 的倍數。

（四） 實驗 4.abcd-bacd=(1000*a+100*b+10*c+1*d)

-(1000*b+100*a+10*c+1*d)

=(999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d)

-(999*b+1*b+99*a+1*a+9*c+1*c+1*d)

=(999a+1a+99b+1b+9c+1c+1d)

-999b-1b-99a-1a-9c-1c-1d

=900a-900b

=9*100a-9*100b

=9*(100a-100b)

經由計算，我們可以得到實驗（四）abcd-bacd 的結果會是 9 的倍數。

（五） 實驗 5.abcd-abdc=(1000*a+100*b+10*c+1*d)

-(1000*a+100*b+10*d+1*c)

=(999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d)

-(999*a+1*a+99*b+1*b+9*d+1*d+1*c)

=(999a+1a+99b+1b+9c+1c+1d)

-999a-1a-99b-1b-9d-1d-1c

=9c-9d

=9*1c-9*1d

=9*(1c-1d)

經由計算，我們可以得到實驗（五）abcd-abdc 的結果會是 9 的倍數。

（六） 實驗 6.abcd-acbd=(1000*a+100*b+10*c+1*d)

-(1000*a+100*c+10*b+1*d)

=(999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d)

-(999*a+1*a+99*c+1*c+9*b+1*b+1*d)

=(999a+1a+99b+1b+9c+1c+1d)

-999a-1a-99c-1c-9b-1b-1d

=90b-90c

=9*10b-9*10c

=9*(10b-10c)

經由計算，我們可以得到實驗（六）abcd-acbd 的結果會是 9 的倍數。

（七） 實驗 7.abcd-cbda=(1000*a+100*b+10*c+1*d)

-(1000*c+100*b+10*d+1*a)

=(999*a+1*a+99*b+1*b+9*c+1*c+1*d)

-(999*c+1*c+99*b+1*b+9*d+1*d+1*a)

=999a+1a+99b+1b+9c+1c+1d

-999c-1c-99b-1b-9d-1d-1a

=999a-990c-9d

=9*111a-9*110c-9*1d

=9*(111a-110c-1d)

經由計算，我們可以得到實驗（七）abcd-cbda 的結果會是 9 的倍數。

經過我們從實驗一到實驗七的驗證，以及後續的計算，我們可以合理推論出如果觀眾手上的四個數字，是隨機亂數排列成新數字，然後一樣用大數減小數，結果也一定會是 9 的倍數。

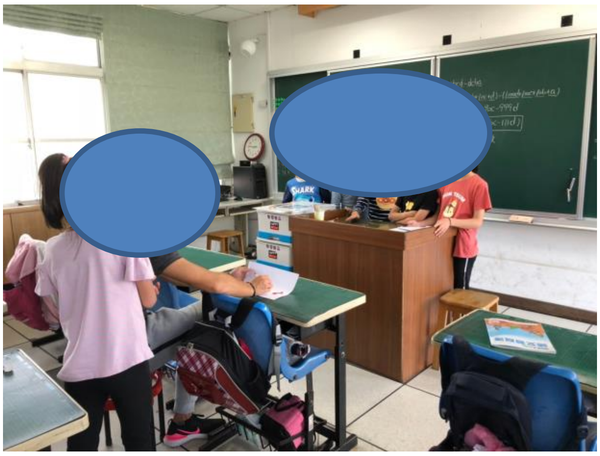
六、我們已經知道魔術的原理，現在我們想想魔術的過程，發現最後階段裡，觀眾算出的答案，只要蓋住一個不為 0 的數，告訴我們剩下數的總和，就可以猜出蓋住的數字，這究竟是為什麼？

接下來我們討論魔術師最後的魔術過程，由於我們知道最後答案的數字加總一定會是 9 的倍數，因此只要觀眾告訴我們剩下數的總和，我們就可以利用這個資訊推測出蓋住的那張牌的數字，假設最後的結果，這三張牌的數字為 3、7、5，而 3+7+5=15，因為我們是用加總的方式尋找 9 的倍數，而≧15 的 9 的倍數就是 18，所以我們用 18 減去 15 得到的數字就是 3，因此我們可以推測出觀眾蓋住的數字為 3。

七、而究竟是為什麼魔術師要請觀眾只能蓋住不為零的數，經過實驗研究後我們發現因為如果出現以下的這種類似情況，魔術就不神奇了。

就是當剩下數加總起來就是 9 的倍數時，就猜不太出來了。

我們假設打開的三個數為 0、4、5，加總起來為 9，我們利用加總的方式，而≧9 的 9 的倍數有兩個，一個是 9，另一個是 18，因此我們無法完全確認觀眾蓋住的數字是多少，這會讓魔術的神奇性打了折扣，因此魔術師才會訂下這個條件。



陸、　研究討論與研究結果

我們覺得，限制太多，對於魔術的神奇性一樣會打折扣，因此我們想做個假設延伸，希望可以推論出魔術的更神奇性。

假設：

　　我們可不可以將四位數的限制提高至五位數或者是六位數，而結果也一定會是 9 的倍數？

以下是我們的實驗過程：

假設：

　　我們可不可以將四位數的限制提高至五位數或者是六位數，而結果也一定會是 9 的倍數？

驗證二：

（一）實驗一：我們將數字提高至五位數，而經由假設一我們可以得知，我們只需要實驗一組隨機數字即可代表全部，所以實驗重點就可以放在將四位數提高至五位數是否也會有相同的結果。

以下是我們的計算過程

abcde-edcba=(10000*a+1000*b+100*c+10*d+1*e)
-(10000*e+1000*d+100*c+10*b+1*a)
=(9999*a+1*a+999*b+1*b+99*c+1*c+9*d+1*d+1*e)
-(9999*e+1*e+999*d+1*d+99*c+1*c+9*b+1*b+1*a)
=9999a+1a+999b+1b+99c+1c+9d+1d+1e
-9999e-1e-999d-1d-99c-1c-9b-1b-1a
=9999a+990b-9999e-990b
=9*1111a+9*110b-9*1111e-9*110b
=9*(1111a+110b-1111e-110b)

經由計算我們可以得到，將四位數提高至五位數，結果仍然會是 9 的倍數。

（二）實驗二：我們將數字提高至六位數，而經由假設一我們可以得知，我們只需要實驗一組隨機數字即可代表全部，所以實驗重點就可以放在將四位數提高至六位數是否也會有相同的結果。

以下是我們的計算過程

abcdef-fedcba=(100000*a+10000*b+1000*c+100*d+10*e+1*f)
-(100000*f+10000*e+1000*d+100*c+10*b+1*a)
=(99999*a+1*a+9999*b+1*b+999*c+1*c+99*d+1*d+9*e+1e+1*f)
-(99999*f+1*f+9999*e+1*e+999*d+1*d+99*c+1*c+9*b+1b+1*a)
=99999a+1a+9999b+1b+999c+1c+99d+1d+9e+1e+1f
-99999f-1f-9999e-1e-999d-1d-99c-1c-9b-1b-1a
=99999a+9990b+900c-99999f-900d-9990e

$=9*(11111a+1110b+100c+11111f-100d-1110e)$

經由計算我們可以得到，將四位數提高至六位數，結果仍然會是 9 的倍數。

經過我們從實驗一到實驗二的驗證，以及後續的計算，我們可以合理推論出我們的假設二”我們可不可以將四位數的限制提高至五位數或者是六位數，而結果也一定會是 9 的倍數？”的結果是正確的，這代表如果我們用這個方式變魔術，魔術的呈現會更神奇。

柒、 結論與推論

一、結論：從這次的研究中，我們發現，只要將四個相同的數字，隨意排列，再將兩數相減，得出來的答案，就必定會是 9 的倍數，還有，若要證明一個數是否為 9 的倍數，只要把那個數中的所有數字加起來，看看是否為九的倍數，就可以簡單快速的證明是否為 9 的倍數。

二、推論：結束這次的研究後，如果將魔術步驟中原本的四位數，增加到五六位數或者無限延伸，也一定可以成立。

捌、 參考資料

康軒數學六上第一單元－最大公因數與最小公倍數

康軒數學六上第五單元－數量關係