金門地區第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：內在美不美？ 正n邊形各邊相同等分下，
　　　　　取同一等分點連線 圖形之探討

關 鍵 詞：正多邊形、面積、相似形　　（最多3個）

編　　號：

製作說明：

1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號由金門縣教育處與承辦單位統一編列。

3.封面編排由參展作者自行設計。

內在美不美？
正 n 邊形各邊相同等分下，取同一等分點連線圖形之探討

摘要

本研究我們將探討正 n 邊形各邊做相同等分下，取各邊相同等分點連線所形成的 n 邊形與原正 n 邊形的面積關係，並推導出一般式。

壹、研究動機

在國中康軒版數學課本第五冊中有介紹到：正三角形各邊中點連線所形成的圖形仍是一個正三角形，且其面積是原來的四分之一。由此，激起我們想去探究若是將正三角形各邊做相同等分下，取同一等分點的連線圖形，還會不會是一個正三角形？又其與原三角形的面積關係為何？並進一步探討若是正 n 邊形採取相同的作法時，是否仍有類似的特性與關係？並試圖找出它們的關係式？

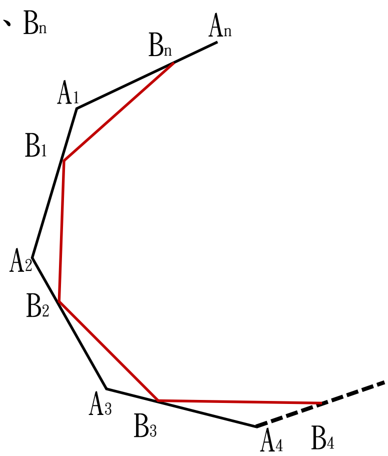
貳、研究目的

一、驗證正 n 邊形各邊相同等分下，取同一等分點連線所成的圖形仍為正 n 邊形。

二、探討此兩正 n 邊形在各種等分下，取同一等分點時的面積關係，並推導出此兩正 n 邊形面積關係的一般式。

參、研究內容

一、基本性質的驗證：正 n 邊形各邊相同等分下，取同一等分點連線所成的圖形是否仍為正 n 邊形？



如右圖，$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 是邊長為 a 的正 n 邊形，B_1、B_2、B_3、⋯、B_n 分別是 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_nA_1}$ 上 x 等分的第 y 等分點，

即 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=\overline{A_3B_3}=\cdots=\overline{A_nB_n}=\frac{y}{x}a$，

則 $\overline{B_1A_2}=\overline{B_2A_3}=\overline{B_3A_4}=\cdots=\overline{B_nA_1}=a-\frac{y}{x}a=\frac{x-y}{x}a$

又 $\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=\cdots=\angle A_n$（正 n 邊形的每一內角皆相等）

$\therefore \triangle A_2B_2B_1 \cong \triangle A_3B_3B_2 \cong \triangle A_4B_4B_3 \cong \cdots \cong \triangle A_1B_1B_n$（SAS 全等）

$\therefore \overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}=\cdots=\overline{B_nB_1}$ （對應邊相等）⋯⋯①

$\angle A_2B_2B_1=\angle A_3B_3B_2=\angle A_4B_4B_3=\cdots=\angle A_1B_1B_n=\alpha^\circ$

$\angle A_2B_1B_2=\angle A_3B_2B_3=\angle A_4B_3B_4=\cdots=\angle A_1B_nB_1=\beta^\circ$ （對應角相等）

$\therefore \angle B_1B_2B_3=\angle B_2B_3B_4=\angle B_3B_4B_5=\cdots=\angle B_nB_1B_2=(180-\alpha-\beta)^\circ$ ⋯⋯②

由①、②得證 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 是正 n 邊形。

有了上述性質的驗證，我們就可以進行正 n 邊形與其各邊相同等分下，取同一等分點連線所形成之正 n 邊形，兩者間面積關係的探討。

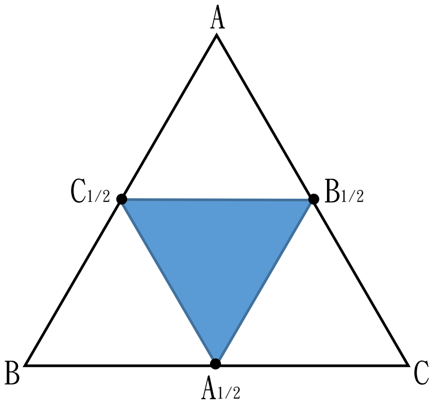
二、正三角形(邊長假定為 a)的研究

(一)取各邊 x 等分的第 1 等分點的連線

1. x=2

顯而易見

▲$A_{1/3}B_{1/3}C_{1/3}$ ÷ ▲ABC $=\frac{1}{4}$



2. x=3

∵∠B=60°，又$\overline{BC_{1/3}}$ $=\frac{2}{3}$a，$\overline{BA_{1/3}}$ $=\frac{1}{3}$a

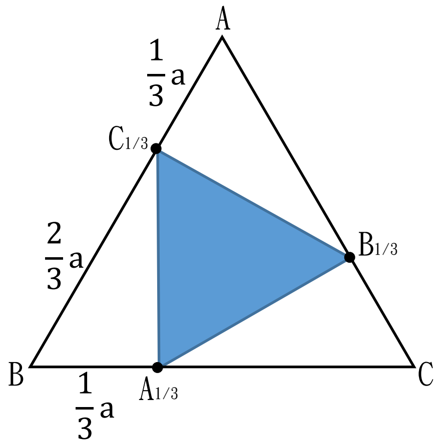
∴ $\overline{A_{1/3}C_{1/3}}$ $=\frac{\sqrt{3}}{3}$a 是▲$A_{1/3}BC_{1/3}$ 中$\overline{BA_{1/3}}$上的高

則▲$A_{1/3}B_{1/3}C_{1/3}$ =▲ABC−▲$A_{1/3}BC_{1/3}$×3

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{3}a\times 3$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$$

故得 ▲$A_{1/3}B_{1/3}C_{1/3}$ ÷ ▲ABC= $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\div\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{1}{3}$



3. x=4

過 $C_{1/4}$點作▲$A_{1/4}BC_{1/4}$ 中$\overline{BA_{1/4}}$上的高$\overline{C_{1/4}H}$

則$\overline{C_{1/4}H}$：$\overline{BC_{1/4}}$ = $\sqrt{3}$：2

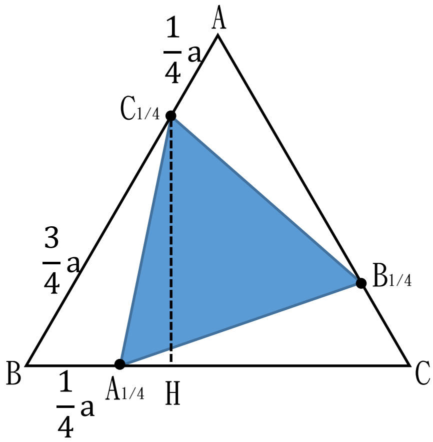
即$\overline{C_{1/4}H}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC_{1/4}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}a=\frac{3\sqrt{3}}{8}a$

則 ▲$A_{1/4}B_{1/4}C_{1/4}$ =▲ABC−▲$A_{1/4}BC_{1/4}$×3

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}a\times\frac{3\sqrt{3}}{8}a\times 3$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{64}a^2$$

故得 ▲$A_{1/4}B_{1/4}C_{1/4}$ ÷ ▲ABC = $\frac{7\sqrt{3}}{64}a^2\div\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{7}{16}$



4. x=5

過 $C_{1/5}$點作▲$A_{1/5}BC_{1/5}$ 中$\overline{BA_{1/5}}$上的高$\overline{C_{1/5}H}$

則$\overline{C_{1/5}H}$：$\overline{BC_{1/5}}$ = $\sqrt{3}$：2

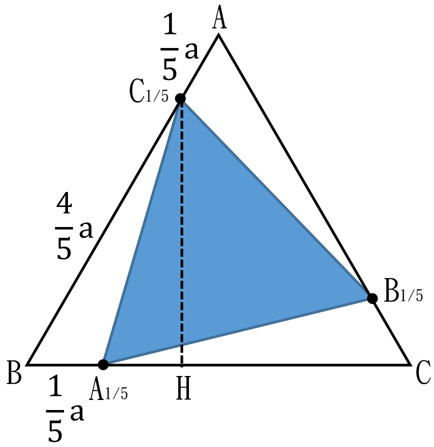
即$\overline{C_{1/5}H}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC_{1/5}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{5}a=\frac{2\sqrt{3}}{5}a$

則 ▲$A_{1/5}B_{1/5}C_{1/5}$ =▲ABC−▲$A_{1/5}BC_{1/5}$×3

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}a\times\frac{2\sqrt{3}}{5}a\times 3$$

$$=\frac{13\sqrt{3}}{100}a^2$$

故得 ▲$A_{1/5}B_{1/5}C_{1/5}$ ÷ ▲ABC = $\frac{13\sqrt{3}}{100}a^2\div\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{13}{25}$



5. 一般式的推演：

▲$A_{1/x}BC_{1/x}$ 中 $\overline{BA_{1/x}}$ 上的高 $\overline{C_{1/x}H}$

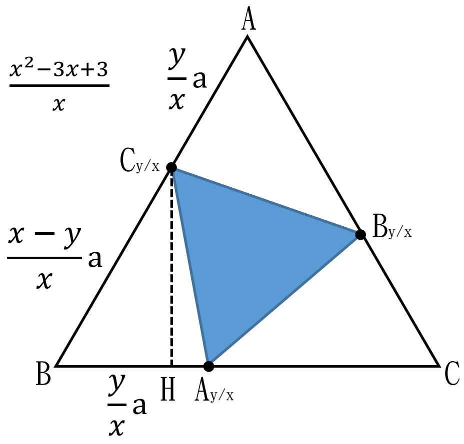
得 $\overline{C_{1/x}H} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC_{1/x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{x-1}{x}a = \frac{(x-1)\sqrt{3}}{2x}a$

則 ▲$A_{1/x}B_{1/x}C_{1/x}$ =▲ABC−▲$A_{1/x}BC_{1/x}$×3

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}a\times\frac{(x-1)\sqrt{3}}{2x}a\times 3$

$=\frac{(x^2-3x+3)\sqrt{3}}{4x}a^2$

故得 ▲$A_{1/x}B_{1/x}C_{1/x}$ ÷ ▲ABC $= \frac{(x^2-3x+3)\sqrt{3}}{4x}a^2 \div \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{x^2-3x+3}{x}$



(二)推廣到取各邊 x 等分的第 y 等分點的連線圖形

▲$A_{y/x}BC_{y/x}$ 中 $\overline{BA_{y/x}}$ 上的高 $\overline{C_{y/x}H}$

得 $\overline{C_{y/x}H} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC_{y/x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{x-y}{x}a = \frac{(x-y)\sqrt{3}}{2x}a$

則 ▲$A_{y/x}B_{y/x}C_{y/x}$ =▲ABC−▲$A_{y/x}BC_{y/x}$×3

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{1}{2}\times\frac{y}{x}a\times\frac{(x-y)\sqrt{3}}{2x}a\times 3$

$=\frac{(x^2-3xy+3y^2)\sqrt{3}}{4x^2}a^2$

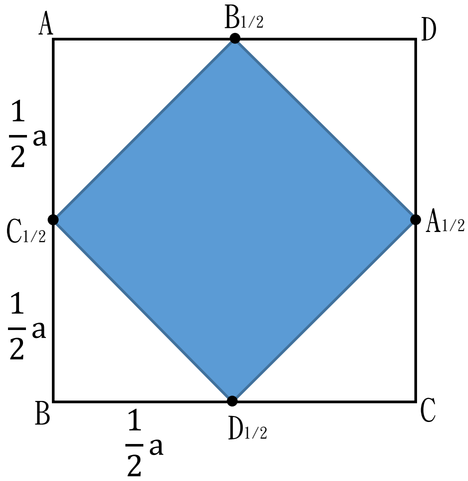
故得 ▲$A_{y/x}B_{y/x}C_{y/x}$ ÷ ▲ABC $= \frac{(x^2-3xy+3y^2)\sqrt{3}}{4x^2}a^2 \div \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{x^2-3xy+3y^2}{x^2}$

三、正方形(邊長假定為 a)的研究

(一)取各邊 x 等分的第 1 等分點的連線

1. x=2

$\overline{C_{1/2}D_{1/2}}^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{2}a^2$



正方形 $A_{1/2}B_{1/2}C_{1/2}D_{1/2}$ 面積 $=\overline{C_{1/2}D_{1/2}}^2 = \frac{1}{2}a^2$

故得

正方形 $A_{1/2}B_{1/2}C_{1/2}D_{1/2}$ 面積÷正方形 ABCD 面積

$=\frac{1}{2}$

2. x=3

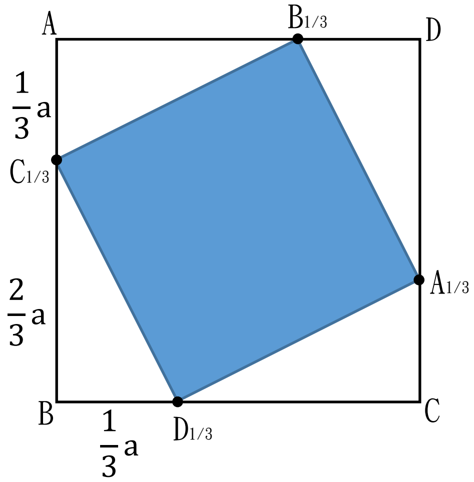
$\overline{C_{1/3}D_{1/3}}^2 = (\frac{2}{3}a)^2 + (\frac{1}{3}a)^2 = \frac{5}{9}a^2$

正方形 $A_{1/3}B_{1/3}C_{1/3}D_{1/3}$ 面積 $=\overline{C_{1/3}D_{1/3}}^2 = \frac{5}{9}a^2$

故得

正方形 $A_{1/3}B_{1/3}C_{1/3}D_{1/3}$ 面積 ÷ 正方形 ABCD 面積

$=\frac{5}{9}$



3. x=4

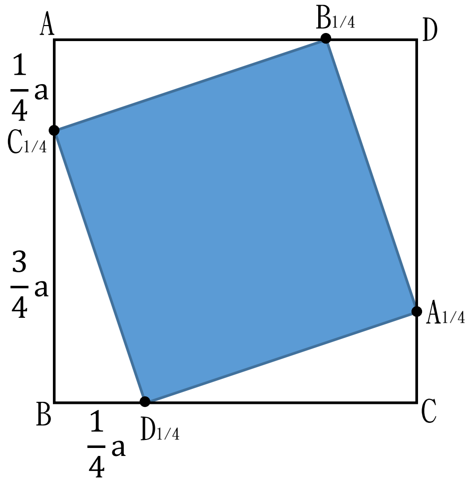
$\overline{C_{1/4}D_{1/4}}^2 = (\frac{3}{4}a)^2 + (\frac{1}{4}a)^2 = \frac{5}{8}a^2$

正方形 $A_{1/4}B_{1/4}C_{1/4}D_{1/4}$ 面積=$\overline{C_{1/4}D_{1/4}}^2 = \frac{5}{8}a^2$

故得

正方形 $A_{1/4}B_{1/4}C_{1/4}D_{1/4}$ 面積 ÷ 正方形 ABCD 面積

$=\frac{5}{8}$



4. x=5

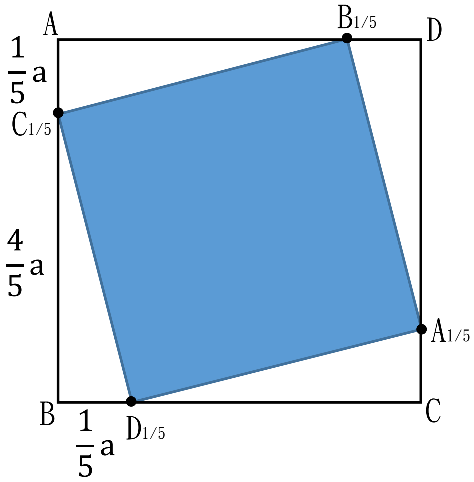
$\overline{C_{1/5}D_{1/5}}^2 = (\frac{4}{5}a)^2 + (\frac{1}{5}a)^2 = \frac{17}{25}a^2$

正方形 $A_{1/5}B_{1/5}C_{1/5}D_{1/5}$ 面積=$\overline{C_{1/5}D_{1/5}}^2 = \frac{17}{25}a^2$

故得

正方形 $A_{1/5}B_{1/5}C_{1/5}D_{1/5}$ 面積 ÷ 正方形 ABCD 面積

$=\frac{17}{25}$



5. 一般式的推演：

$\overline{C_{1/x}D_{1/x}}^2 = (\frac{x-1}{x}a)^2 + (\frac{1}{x}a)^2 = \frac{x^2-2x+2}{x^2}a^2$

正方形 $A_{1/x}B_{1/x}C_{1/x}D_{1/x}$ 面積=$\overline{C_{1/x}D_{1/x}}^2 = \frac{x^2-2x+2}{x^2}a^2$

故得

正方形 $A_{1/x}B_{1/x}C_{1/x}D_{1/x}$ 面積 ÷ 正方形 ABCD 面積

$=\frac{x^2-2x+2}{x^2}$

(二)推廣到取各邊 x 等分的第 y 等分點的連線圖形

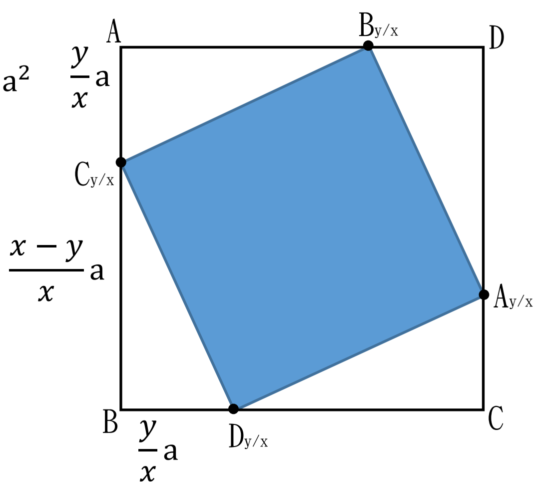
$\overline{C_{y/x}D_{y/x}}^2 = (\frac{x-y}{x}a)^2 + (\frac{y}{x}a)^2 = \frac{x^2-2xy+2y^2}{x^2}a^2$

正方形 $A_{y/x}B_{y/x}C_{y/x}D_{y/x}$ 面積=$\overline{C_{y/x}D_{y/x}}^2 = \frac{x^2-2xy+2y^2}{x^2}a^2$

故得

正方形 $A_{y/x}B_{y/x}C_{y/x}D_{y/x}$ 面積 ÷ 正方形 ABCD 面積

$=\frac{x^2-2xy+2y^2}{x^2}$



四、正 n 邊形的研究：

（一)在研究正五邊形上述特性時，我們遇到了無法算出正五邊形面積的瓶頸，此時老師指引我們另一個探索的方向：利用”相似形面積比=對應邊長平方比的概念”，只要能算出**內接的正 n 邊形的邊長與原正 n 邊形邊長**的關係，就可以算出兩圖形面積的關係了。這其中當然還存在求邊長的問題，所以我們還必須具備下列各相關數學知識，才能有效解決我們研究過程中碰到的難題：

1.相似形及相似形面積比=對應邊長平方比的概念：

在康軒版國中數學課本第五冊第 1 章相似形中提到，相似三角形面積比=對應邊長平方比，即「若△ABC~△DEF，其中 A、B、C 分別對應 D、E、F，則▲ABC：▲DEF=$\overline{AB}^2$：$\overline{DE}^2$」，推廣到任意相似多邊形，

「若 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ~ n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$，其中 A_1、A_2、⋯、A_n 分別對應 B_1、B_2、⋯、B_n，則

n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 面積：n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 面積 =$\overline{A_1A_2}^2$：$\overline{B_1B_2}^2$」？

證明：∵n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ~ n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$，

$\therefore \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \cdots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{B_{n-1}B_n}} = \frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{B_nB_1}} = k$

過 A_1 與 B_1 可分別作該 n 邊形的 n-3 條對角線，並分別將 n 邊形分割成(n-2)個三角形

則△$A_1A_2A_3$~△$B_1B_2B_3$、△$A_1A_3A_4$~△$B_1B_3B_4$、⋯、△$A_1A_{n-1}A_n$~△$B_1B_{n-1}B_n$

$\therefore \frac{▲A_1A_2A_3}{▲B_1B_2B_3} = \frac{\overline{A_1A_2}^2}{\overline{B_1B_2}^2} = k^2$　$\therefore$ ▲$A_1A_2A_3$ = k^2▲$B_1B_2B_3$

同理可得 ▲$A_1A_3A_4$ = k^2▲$B_1B_3B_4$ 、⋯、 ▲$A_1A_{n-1}A_n$ = k^2▲$B_1B_{n-1}B_n$

則 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 面積 = ▲$A_1A_2A_3$+▲$A_1A_3A_4$+⋯+▲$A_1A_{n-1}A_n$

= k^2▲$B_1B_2B_3$+k^2▲$B_1B_3B_4$+⋯+k^2▲$B_1B_{n-1}B_n$

= k^2(▲$B_1B_2B_3$+▲$B_1B_3B_4$+⋯+▲$B_1B_{n-1}B_n$)

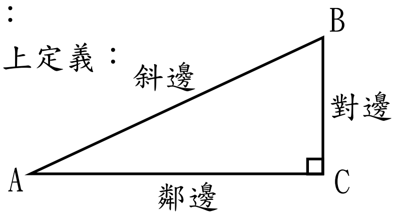
= k^2×n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 面積

即$\frac{\text{n 邊形}A_1A_2\ldots A_n\text{面積}}{\text{n 邊形}B_1B_2\ldots B_n\text{面積}} = k^2 = \frac{\overline{A_1A_2}^2}{\overline{B_1B_2}^2}$

故得證　n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 面積：n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 面積 =$\overline{A_1A_2}^2$：$\overline{B_1B_2}^2$

2.直角三角形的三角比—sin 與 cos 的定義及相關基本性質：

(1)銳角三角比：在直角△ABC 中，若∠C 是直角，則數學上定義：



∠A 的正弦=sinA=$\frac{\text{∠A 的對邊之長}}{\text{∠A 的斜邊之長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

∠A 的餘弦=cosA=$\frac{\text{∠A 的鄰邊之長}}{\text{∠A 的斜邊之長}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

(2)廣義角的三角比：若θ是一個廣義角。並將θ的頂點放在直角坐標平面的原點 O，如下：(不論 P 點落在哪一象限內)

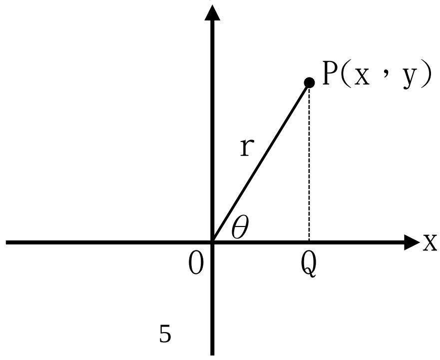
均定義　$\sin\theta=\frac{y}{r}$

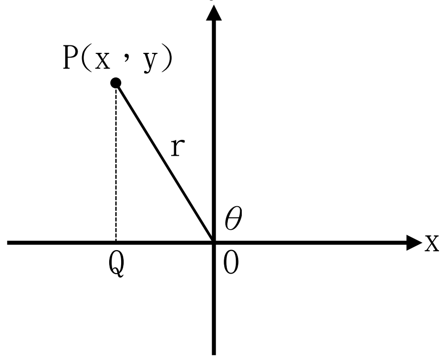
$\cos\theta=\frac{x}{r}$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$

則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2} = 1$





(3)則由(1)、(2)可知，

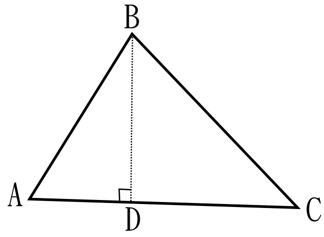
i. 若 $0^\circ<\theta<90^\circ$，則 $90^\circ<180^\circ-\theta<180^\circ$

所以推得 $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ ； $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

ii.若 $\theta=90^\circ$，則 $\cos90^\circ=0$

3.餘弦定理：在△ABC 中，

(1)若∠A 是銳角：



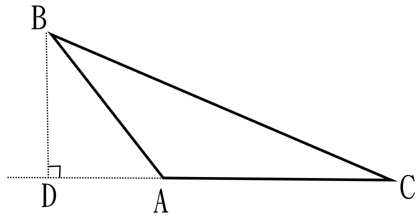
$\overline{BD}=\overline{AB}\sin A$ ， $\overline{AD}=\overline{AB}\cos A$

$\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AB}\cos A$

由畢氏定理知

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=(\overline{AB}\sin A)^2+(\overline{AC}-\overline{AB}\cos A)^2\\&=\overline{AB}^2\sin^2 A+\overline{AC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\cos A+\overline{AB}^2\cos^2 A\\&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\end{aligned}$$

(2)若∠A 是鈍角：



$\overline{BD}=\overline{AB}\sin(180^\circ-A)=\overline{AB}\sin A$

$\overline{AD}=\overline{AB}\cos(180^\circ-A)=-\overline{AB}\cos A$

$\overline{CD}=\overline{AC}+(-\overline{AB}\cos A)=\overline{AC}-\overline{AB}\cos A$

則同樣可推得

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A$

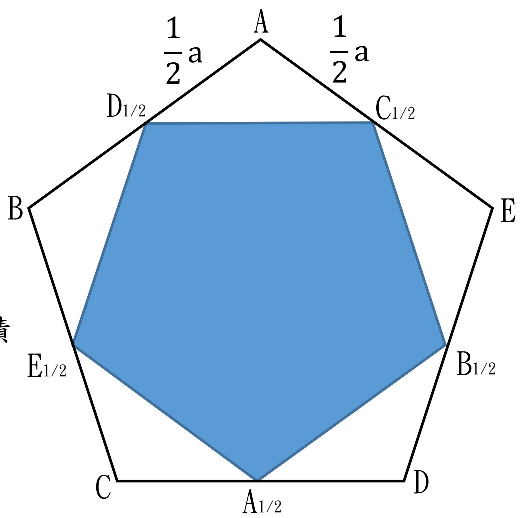
(3)若∠A 是直角：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\\&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\end{aligned}$$

故由以上(1)~(3)可得，在任意△ABC 中，$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A$

(二)正五邊形(邊長假定為 a)的研究

1.取各邊 x 等分的第 1 等分點的連線



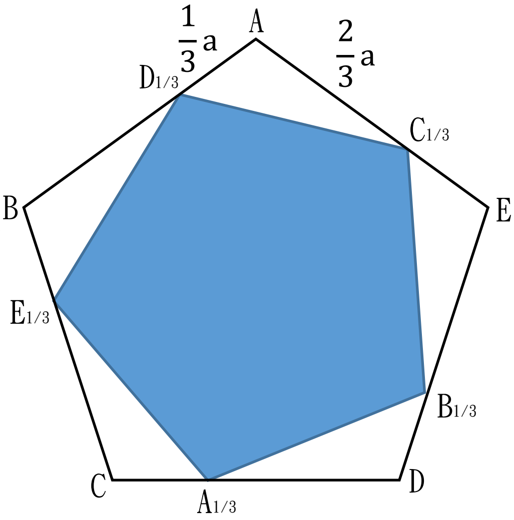
(1)x=2

$$\text{則}\overline{C_{1/2}D_{1/2}}^2=(\tfrac{1}{2}\mathrm{a})^2+(\tfrac{1}{2}\mathrm{a})^2-2\times\tfrac{1}{2}\mathrm{a}\times\tfrac{1}{2}\mathrm{a}\times cosA$$
$$=\frac{\mathrm{a}^2}{2}(1-cosA)$$

故得

正五邊形 $A_{1/2}B_{1/2}C_{1/2}D_{1/2}E_{1/2}$ 面積÷正五邊形 ABCDE 面積

$=\frac{1-cosA}{2}$



(2)x=3

$$\text{則}\overline{C_{1/3}D_{1/3}}^2=(\tfrac{1}{3}\mathrm{a})^2+(\tfrac{2}{3}\mathrm{a})^2-2\times\tfrac{1}{3}\mathrm{a}\times\tfrac{2}{3}\mathrm{a}\times cosA$$
$$=\frac{\mathrm{a}^2}{9}(5-4cosA)$$

故得

正五邊形 $A_{1/3}B_{1/3}C_{1/3}D_{1/3}E_{1/3}$ 面積÷正五邊形 ABCDE 面積

$=\frac{5-4cosA}{9}$

(3)一般式的推演：

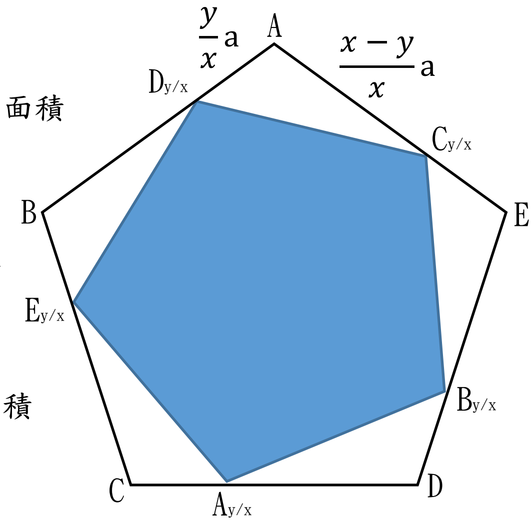
$$\overline{C_{1/x}D_{1/x}}^2 = (\frac{1}{x}a)^2 + (\frac{x-1}{x}a)^2 - 2 \times \frac{1}{x}a \times \frac{x-1}{x}a \times \cos A$$
$$= \frac{a^2}{x^2}(1 + (x-1)^2 - 2(x-1)\cos A)$$

故得

正五邊形 $A_{1/x}B_{1/x}C_{1/x}D_{1/x}E_{1/x}$ 面積 ÷ 正五邊形 ABCDE 面積

$$=\frac{1+(x-1)^2-2(x-1)\cos A}{x^2}$$

2. 推廣到取各邊 x 等分的第 y 等分點的連線圖形



$$\overline{C_{y/x}D_{y/x}}^2 = (\frac{y}{x}a)^2 + (\frac{x-y}{x}a)^2 - 2 \times \frac{y}{x}a \times \frac{x-y}{x}a \times \cos A$$
$$= \frac{a^2}{x^2}(y^2 + (x-y)^2 - 2y(x-y)\cos A)$$

故得

正五邊形 $A_{y/x}B_{y/x}C_{y/x}D_{y/x}E_{y/x}$ 面積 ÷ 正五邊形 ABCDE 面積

$$=\frac{y^2+(x-y)^2-2y(x-y)\cos A}{x^2}$$

(三)推廣到正 n 邊形，取各邊 x 等分的第 y 等分點的連線圖形

正 n 邊形 $A1_{y/x}A2_{y/x}A3_{y/x}\cdots An_{y/x}$ 面積÷正 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 面積

$$=\frac{y^2+(x-y)^2-2y(x-y)\cos\theta}{x^2}$$
$$=\frac{x^2-2(1+\cos\theta)xy+2(1+\cos\theta)y^2}{x^2}$$

其中 $\theta=(180-\frac{360}{n})^\circ$ 是正 n 邊形的每一個內角的度數

由以上推導出的關係式，我們利用 Excel 計算出幾種正 n 邊形(n=3、4、5、…、10)，取各邊 x 等分的第 y 等分點的連線所得到的正 n 邊形與原正 n 邊形面積的比值，如下表：

x 等分	第 y 等分點	正三角形	正方形	正五邊形	正六邊形	正七邊形
2	1	0.250000	0.500000	0.654508	0.750000	0.811745
3	1	0.333333	0.555556	0.692896	0.777778	0.832662
3	2	0.333333	0.555556	0.692896	0.777778	0.832662
4	1	0.437500	0.625000	0.740881	0.812500	0.858809
4	2	0.250000	0.500000	0.654508	0.750000	0.811745
4	3	0.437500	0.625000	0.740881	0.812500	0.858809
5	1	0.520000	0.680000	0.778885	0.840000	0.879517
5	2	0.280000	0.520000	0.668328	0.760000	0.819275
5	3	0.280000	0.520000	0.668328	0.760000	0.819275
5	4	0.520000	0.680000	0.778885	0.840000	0.879517
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	99	0.970300	0.980200	0.986319	0.990100	0.992545

x 等分	第 y 等分點	正八邊形	正九邊形	正十邊形	…	正 100 邊形
2	1	0.853553	0.883022	0.904508	…	0.999013
3	1	0.869825	0.896020	0.915119	…	0.999123
3	2	0.869825	0.896020	0.915119	…	0.999123
4	1	0.890165	0.912267	0.928381	…	0.999260
4	2	0.853553	0.883022	0.904508	…	0.999013
4	3	0.890165	0.912267	0.928381	…	0.999260
5	1	0.906274	0.925134	0.938885	…	0.999369
5	2	0.859411	0.887701	0.908328	…	0.999053
5	3	0.859411	0.887701	0.908328	…	0.999053
5	4	0.906274	0.925134	0.938885	…	0.999369
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	99	0.994201	0.995368	0.996219	…	0.999961

肆、研究結果

一、正 n 邊形，各邊作 x 等分，取第 y 個等分點的連線所成圖形仍是正 n 邊形。

二、設 m=y/x，則 0<m<1，當 m 值固定時，則 n 越大，新正 n 邊形與原正 n 邊形面積的比值越大。

三、當 n 值固定時，則

(一)m=$\frac{1}{2}$（即各邊中點連線）時，新正 n 邊形與原正 n 邊形面積的比值最小。

(二)m 值越靠近 0 或靠近 1（即等分點越接近原 n 邊形的頂點）時，新正 n 邊形與原正 n 邊形面積的比值越大。

四、其比值為$\frac{y^2+(x-y)^2-2y(x-y)cos\theta}{x^2}$ （或整理成$\frac{x^2-2(1+cos\theta)xy+2(1+cos\theta)y^2}{x^2}$ ）

其中 $\theta=(180-\frac{360}{n})^\circ$是正 n 邊形的每一個內角的度數

伍、參考資料

一、康軒版 國中九年級數學課本—第五冊 第 1 章 相似形

二、南一版 高中一年級數學課本—第二冊 第 4 章 三角比