金門地區第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱:當數字遇見顏色-變色龍問題之探討

關 鍵 詞：差異、倍數、相對距離

編 號：

目錄

摘要

我們這個研究是在探討100隻變色龍每2個不同顏色的變色龍碰撞後變成第3種變色龍。我們先從3色開始著手，發現只要有2數的相差為3的倍數即有解；接下來是4數，我們也發現了只要3數的相差為4的倍數即有解；然後我們開始嘗試5數，也得到相同的結果，我們發現了1個規律，就是n-1個數的差異為n的倍數即有解。最後，我們得到的結論就是只要有n-1個數的差異為n的倍數即有解。

壹、研究動機

在數學課時，老師提出了一組有趣的問題，名字是:變色龍。它有幾個問題。第一個問題是有100隻變色龍，三種顏色，分別有15、25、60隻，兩種顏色碰在一起會變成第三種顏色，生物學家認為會全部變成同一種顏色，結果真的發生了，是怎麼變的；第二個問題是為什麼生物學家這麼肯定；第三個問題是三種顏色變四種顏色，從兩種碰在一起變成三種碰在一起，才會變第四種顏色。我們感到非常有興趣，也產生了許多疑問激起我們的好奇心，於是決定研究這個問題。

貳、研究目的

一、研究三色的變色龍要怎麼解？

二、研究四色的變色龍要怎麼解？

三、研究五色的變色龍要怎麼解？

四、研究n色的變色龍要怎麼解？

參、研究設備與器材

筆、紙、筆記型電腦、模型

肆、文獻探討

我們找到了一個科展作品，題目是:變色球遊戲的探討，以下為此作品摘要:

一、無論經過幾次操作，一次操作會使兩數拉近或遠離3的倍數(三色)

二、四色球全部有解

三、四色的變色方式為取兩色隨機變成第三或第四色

我們的作品跟這個作品不一樣的地方在於：變色規則不一樣，我們是以n-1個數去碰變成第n色，因此是否能變色成功的條件也有差異。

伍、研究方法與過程

一、三色的變色龍要怎麼解？

原問題：一個島上有綠色、棕色、黑色三種變色龍各 15、 25、60 隻。生物學家發現當兩隻不同顏色的變色龍相遇時，這兩隻會同時變成第三種顏色。

1. 一名生物數學家研究這個現象後，斷定這 100 隻變色龍有機會全部變成同一種顏色。結果還真的發生了! 請問是怎麼變的? 這個顏色是什麼?
2. 你能解釋為什麼這位生物學家如此有把握嗎?

操作：一開始我們嘗試解決這個問題，得到的結果（如表一）。

表一

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程	
15	+16	31	-5	26	+10	36	-7	29	+6	35	-1	34	-34	0
25	-8	17	+10	27	-5	22	+14	36	-3	33	-1	32	+68	100
60	-8	52	-5	47	-5	42	-7	35	-3	32	+2	34	-34	0

但這樣的變色過程我們看不出什麼規律性，接著我們觀察到初始數值 15、25、60 的最大公因數是 5，於是我們試著每次變色都以五的倍數改變（如表二、表三、表四所示）。

表二

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程	
15	-15	0	+50	50	-30	20	-20	0	+40	40	-40	0
25	+30	55	-25	30	-30	0	+40	40	-20	20	+80	100
60	-15	45	-25	20	+60	80	-20	60	-20	40	-40	0

表三

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程	
15	+40	55	-5	50	-50	0
25	-20	5	-5	0	+100	100
60	-20	40	+10	50	-50	0

表四

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程	
15	-5	10	+30	40	-40	0
25	+10	35	-15	20	+80	100
60	-5	55	-15	40	-40	0

我們發現：

（一）所有的結果都會在初始數值（25）這個位置完成。

（二）以 15、25、和 60 的最大公因數 5 為基本單位去解，會比較快變色成功。

（三）如果想讓三種變色龍的顏色都變成同一種的話，我們必須先讓其中任兩種變色龍的數量變得一樣多，才能進一步讓所有變色龍都變成另外一種的顏色。

（四）要讓其中兩種顏色的變色龍變得一樣多的話，就一定是要讓數量最少或是次少的變色龍數量增加，而不是讓數量已經是最多的變色龍增加。

於是我們做了以下的猜想。

猜想： 我們發現 60 與 15 相差 45，且 45 同時也是 3 的倍數，於是我們猜想三數中只要有兩數的差是三的倍數就可以完成，於是我們試著用另外一組數據（5、41、54）來嘗試（如表五）。

表五

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程	
5	**+6**	**11**	**+6**	**17**	**+6**	**23**	**+6**	**29**	**-29**	**0**
41	**-3**	**38**	**-3**	**35**	**-3**	**32**	**-3**	**29**	**-29**	**0**
54	**-3**	**51**	**-3**	**48**	**-3**	**45**	**-3**	**42**	**+58**	**100**

由表五的結果顯示與我們的猜想是符合的（41 與 5 的差 36 是 3 的倍數，最終可以變成第三數），於是我們開始從基本的移動量來思考：一個較大的數字−1 勢必會有另一個較小的數字+2，兩數的距離會減少 3，相反的一個較小的數字 −1 勢必會有另一個較大的數字+2，兩數的距離則會增加 3。

換句話說，如果把變色龍的數量畫在數線上，當我們讓數量最少的變色龍數量+2，其餘兩種變色龍數量−1 時，其實就會使得數量最少的變色龍，與其它兩種變色龍的**相對距離**拉近 3（如下圖 1 所示）。

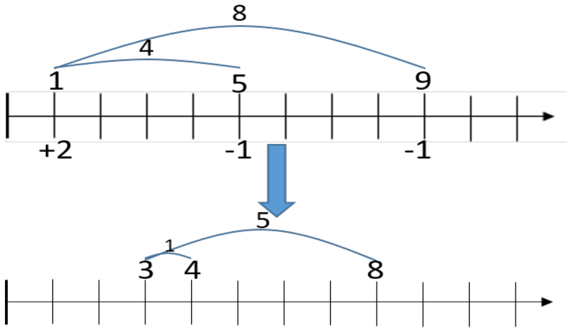

圖 1

證明：由於三數的相對位置不會有任何影響，於是我們將三色蜥蜴的數量設為正整數 N_1、N_2、N_3 並排序最左邊的數為 N_1，中間的數為 N_2，右邊的數為 N_3，且 $0\leqq N_1<N_2<N_3$，N_1、N_2、$N_3\in \mathbb{N}\cup 0$ 可得三種基本動作 M_1、M_2、M_3（如表六）

表六

動作 \ 不同位置移動量	N_1 的移動量	N_2 的移動量	N_3 的移動量
M_1	$+2$	-1	-1
M_2	-1	$+2$	-1
M_3	-1	-1	$+2$

透過基本動作的重複運作可知

a_1M_1＝（$+2a_1$、$-a_1$、$-a_1$）（表示進行 a_1 次的 M_1 動作）

a_2M_2＝（$-a_2$、$+2a_2$、$-a_2$）（表示進行 a_2 次的 M_2 動作）

a_3M_3＝（$-a_3$、$-a_3$、$+2a_3$）（表示進行 a_3 次的 M_3 動作）

並將三種基本動作混合使用得到：

$a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3$＝（$+2a_1-a_2-a_3$、$-a_1+2a_2-a_3$、$-a_1-a_2+2a_3$）

因此三數（N_1、N_2、N_3）經過 a_1 次的 M_1 動作、a_2 次的 M_2 動作、a_3 次的 M_3 動作後可以得到三個位置的最終數值為（$N_1+2a_1-a_2-a_3$、$N_2-a_1+2a_2-a_3$、$N_3-a_1-a_2+2a_3$）（如表七）。

表七

動作 \ 不同位置移動量	N_1 的移動量	N_2 的移動量	N_3 的移動量
a_1M_1	$+2a_1$	$-a_1$	$-a_1$
a_2M_2	$-a_2$	$+2a_2$	$-a_2$
a_3M_3	$-a_3$	$-a_3$	$+2a_3$
$a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3$	$+2a_1-a_2-a_3$	$-a_1+2a_2-a_3$	$-a_1-a_2+2a_3$

接下來我們將三數之間任兩個位置的移動量分成三種情況：

（一）N_2的移動量$-N_1$的移動量

$= (-a_1+2a_2-a_3(2a_1-a_2-a_3)$

$= -3a_1+3a_2$

$=3(a_2-a_1)$

（二）N_3的移動量$-N_2$的移動量

$= (-a_1-a_2+2a_3(-a_1+2a_2-a_3)$

$= -3a_2+3a_3$

$=3(a_3-a_2)$

（三）N_3的移動量$-N_1$的移動量

$= (-a_1-a_2+2a_3(2a_1-a_2-a_3)$

$= -3a_1+3a_3$

$=3(a_3-a_1)$

綜合（一）、（二）、（三）的結果可知若任兩數移動量的差為 3 的倍數，則表示此兩數的差必為 3 的倍數才可以形成相同的數，即該組變色龍最終可變成同一顏色。

結論：1.若三個數之間的差都是 3 的倍數，那麼到最後所有的變色龍全部落在哪裡都可以。

2.而若只有兩個數之間的差是 3 的倍數，則最後所有變色龍一定會落在另一個數上。

3.若三個數之間差的都不是 3 的倍數的話，那就無解了。

回顧：了解了以上性質，我們回過頭來看原本的問題，要讓三色變色龍變成同一種顏色，只要三色的變色龍數量中有兩色數量差為 3 的倍數，則最後必可變成同一顏色，且所有變色龍會落在另一個非差 3 的倍數的數上。

接下來我們試圖想出，有沒有一種辦法，可以算出總共要執行幾次的動作 M_1、動作 M_2、動作 M_3，而不用管順序。為此，我們定義了新的符號:X、Y、Z 、 x、y、z

將 N_1、N_2、N_3 中相差為 3k 的兩個數找出來，較大的即為 Z，較小的即為 Y，最後剩下的那個數即為 X。x 與 X 之間的關系即等同於 M_1 與 N_1 之間的關係，Y 與 y、Z 與 z 亦然。

最後，我們找到一個公式(如下)

執行 Y+2(Z-Y)/3 次 x，(Z-Y)/3 次 y，0 次 z

求解的最短過程:(如下圖 2)

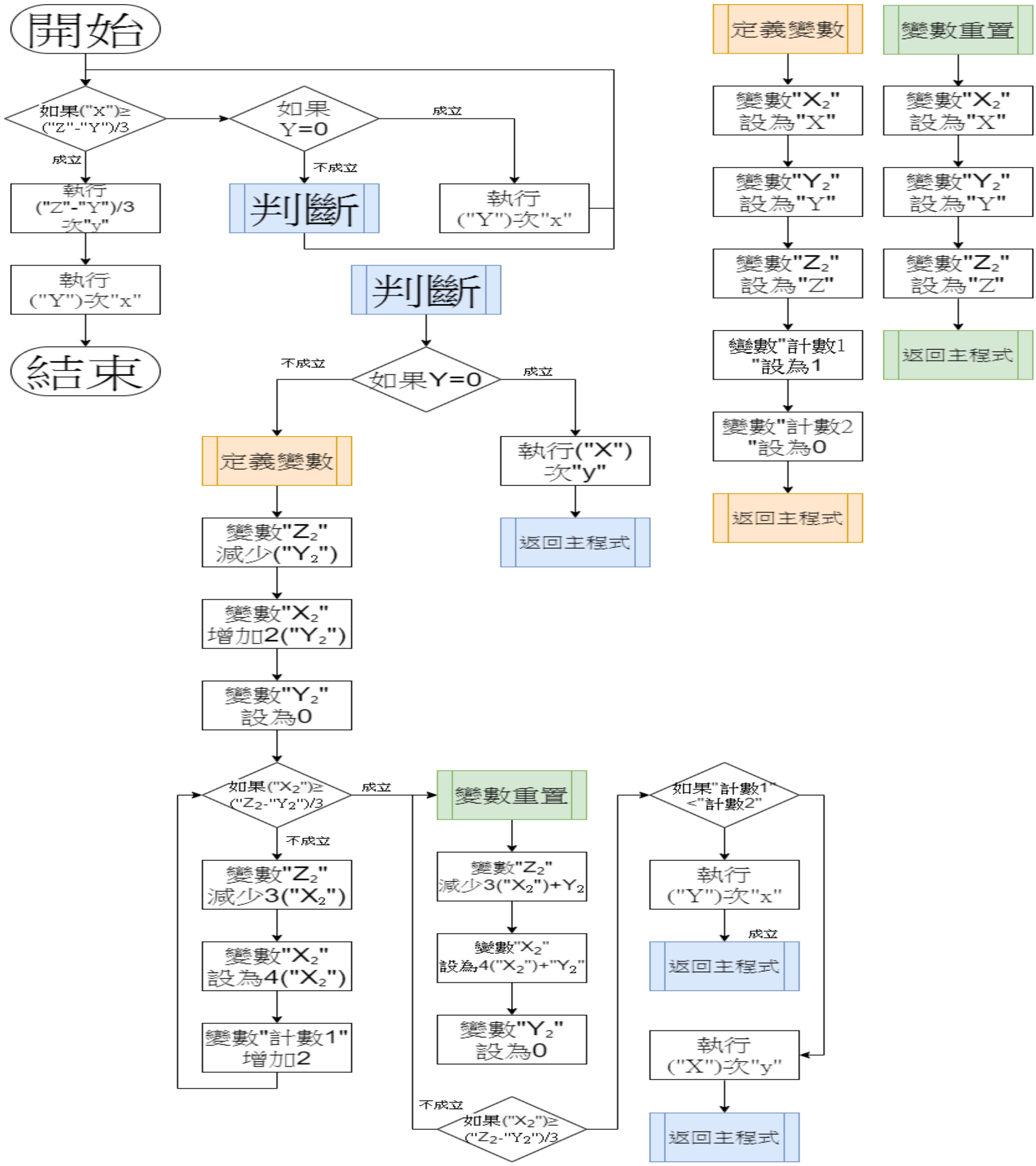

圖 2

二、四色的變色龍要怎麼解？

原問題：春天一到，50 隻小變色龍孵出來，結果居然出現新的顏色—綠、 棕、 黑、黃的小龍各 10, 11, 19, 10 隻。連同原來 100 隻同色的一起, 這 150 隻都改用新的規則變色：只有在三個完全不同顏色的各一隻湊在一起時，才會同時變成第四種顏色。請問有沒有可能全部變成同一種顏色?

操作：解決三色的問題後我們試著開始解決上述問題並記錄下來（如表八）

表八　四色原題的嘗試記錄表

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程
10	-1	9	+3	12	-8	4	-4	0	+36	36	-29	7	…
10	-1	9	-1	8	-8	0	+12	12	-12	0	+87	87	…
111	-1	110	-1	109	-8	101	-4	97	-12	85	-29	56	…
19	+3	22	-1	21	+24	45	-4	41	-12	29	-29	0	…

試了幾次以後我們發現似乎無法成功，於是根據三色得到的結果我們判斷至少需要三個數字兩兩差是 4 的倍數才能變色成功，於是我們找了一組滿足這個條件的數據來試試看（如表九）

表九 有三個數字兩兩差是 4 的倍數

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程	
1	+3	4	-1	3	-1	2	+3	5	+3	8	-1	7	-7	0
5	-1	4	-1	3	+3	6	-1	5	-1	4	+3	7	-7	0
9	-1	8	+3	11	-1	10	-1	9	-1	8	-1	7	-7	0
10	-1	9	-1	8	-1	7	-1	6	-1	5	-1	4	+21	25

結果顯示可以變色成功，於是我們再找了另一組數據滿足四個數字兩兩差是 4 的倍數（如表十）

表十 四個數字兩兩差都是 4 的倍數

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程	
1	+3	4	-1	3	-1	2	+3	5	+3	8	-1	7	-7	0
5	-1	4	-1	3	+3	6	-1	5	-1	4	+3	7	-7	0
9	-1	8	+3	11	-1	10	-1	9	-1	8	-1	7	-7	0
13	-1	12	-1	11	-1	10	-1	9	-1	8	-1	7	+21	28

結果也同樣可以變色成功，於是我們歸納得到四數中至少有三個數字兩兩差是 4 的倍數就可以變色成功。

猜想：我們之前提到三色的發現跟兩個數相差 3 的倍數可以成功變色，因此我們猜想四色可以成功變色的條件是不是也是只要三個數相差 4 的倍數就可以成功變色？

根據三色的推論，要使所有的蜥蜴都變成同一種顏色的話，要先讓其中三種顏色的蜥蜴數量變得一樣多，而要讓三種顏色的蜥蜴數量變得一樣多的話，就代表要有至少三種顏色的蜥蜴的數量之間的差是 4 的倍數，因為當某一種顏色的蜥蜴數量+3，其他三種顏色的蜥蜴數量-1 時，會使得該顏色的蜥蜴的數量與其它三種顏色的蜥蜴之間的差增加 4 或減少 4。(如下圖 3 所示)

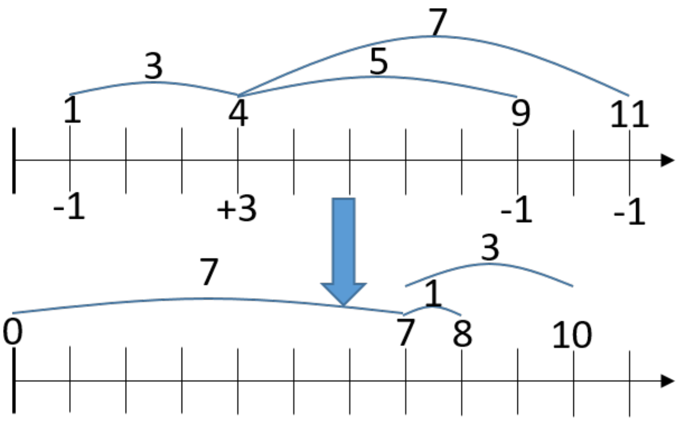

圖 3

證明：根據三色的設定方式，我們將四色變色龍的數量設為正整數 N_1、N_2、N_3、N_4，並由左而右依序排列為 N_1、N_2、N_3、N_4，且 $0 \leqq N_1 < N_2 < N_3 < N_4$，$N_1$、$N_2$、$N_3$、$N_4 \in \mathbb{N} \cup 0$可得四種基本動作 M_1、M_2、M_3、M_4（如表八）

表八

不同位置移動 動作	N_1的移動量	N_2的移動量	N_3的移動量	N_4的移動量
M_1	+3	−1	−1	−1
M_2	−1	+3	−1	−1
M_3	−1	−1	+3	−1
M_4	−1	−1	−1	+3

透過基本動作的重複運作可知

$a_1M_1 =$（$+3a_1$、$-a_1$、$-a_1$、$-a_1$）（表示進行 a_1 次的 M_1 動作）

$a_2M_2 =$（$-a_2$、$+3a_2$、$-a_2$、$-a_2$）（表示進行 a_2 次的 M_2 動作）

$a_3M_3 =$（$-a_3$、$-a_3$、$+3a_3$、$-a_3$）（表示進行 a_3 次的 M_3 動作）

$a_4M_4 =$（$-a_4$、$-a_4$、$-a_4$、$+3a_4$）（表示進行 a_4 次的 M_4 動作）

並將四種基本動作混合使用得到

$a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4$

$= (+3a_1 - a_2 - a_3 - a_4$、$-a_1 + 3a_2 - a_3 - a_4$、$-a_1 - a_2 + 3a_3 - a_4$、$-a_1 - a_2 - a_3 + 3a_4)$

因此四數（N_1、N_2、N_3、N_4）經過 a_1 次的 M_1 動作、a_2 次的 M_2 動作、a_3 次的 M_3 動作、a_4 次的 M_4 動作後可以得到四個位置的最終數值為

（$N_1 + 3a_1 - a_2 - a_3 - a_4$、$N_2 - a_1 + 3a_2 - a_3 - a_4$、$N_3 - a_1 - a_2 + 3a_3 - a_4$、$N_4 - a_1 - a_2 - a_3 + 3a_4$）。（如表九）

表九

動作＼不同位置移動量	N_1 的移動量	N_2 的移動量	N_3 的移動量	N_4 的移動量
a_1M_1	$+3a_1$	$-a_1$	$-a_1$	$-a_1$
a_2M_2	$-a_2$	$+3a_2$	$-a_2$	$-a_2$
a_3M_3	$-a_3$	$-a_3$	$+3a_3$	$-a_3$
a_4M_4	$-a_4$	$-a_4$	$-a_4$	$+3a_4$
$a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4$	$+3a_1 - a_2 - a_3 - a_4$	$-a_1 + 3a_2 - a_3 - a_4$	$-a_1 - a_2 + 3a_3 - a_4$	$-a_1 - a_2 - a_3 + 3a_4$

接下來我們將移動的情形分為移動量和移動方式

（一）移動量

我們將四數之間任兩個位置的移動量分成 6 種情況：

1.N_2 的移動量－ N_1 的移動量

$= (-a_1 + 3a_2 - a_3 - a_4(+3a_1 - a_2 - a_3 - a_4)$

$= -4a_1 + 4a_2$

$=4(a_2 - a_1)$

2.N_3 的移動量－ N_1 的移動量

$= (-a_1 - a_2 + 3a_3 - a_4(+3a_1 - a_2 - a_3 - a_4)$

$= -4a_1 + 4a_3$

$=4(a_3 - a_1)$

3.N_4的移動量$-$ N_1的移動量

$= (-a_1-a_2-a_3+3a_4+3a_1-a_2-a_3-a_4)$

$=-4a_1+4a_4$

$=4(a_4-a_1)$

4.N_3的移動量$-$ N_2的移動量

$= (-a_1-a_2+3a_3-a_4(-a_1+3a_2-a_3-a_4)$

$= -4a_2+4a_3$

$=4(a_3-a_2)$

5.N_4的移動量$-$ N_2的移動量

$= (-a_1-a_2-a_3+3a_4) - (-a_1+3a_2-a_3-a_4)$

$=-4a_2+4a_4$

$=4(a_4-a_2)$

6.N_4的移動量$-N_3$的移動量

$= (-a_1-a_2-a_3+3a_4) - (-a_1-a_2+3a_3-a_4)$

$=-4a_3+4a_4$

$=4(a_4-a_3)$

綜合 1～6 的結果可知任兩數移動量的差皆為 4 的倍數，則表示此兩數的差必為 4 的倍數才可以形成相同的數，即該組變色龍最終可變成同一顏色。

（二）移動方式

四數中的三個數字（兩兩差是 4 的倍數）要如何變成相同數字：

因為**同時間只能有一數增加，其他數減少，**

我們將三數定為：最大的數(設為Ａ)次大的數(設為 B) 最小的數(設為Ｃ)，根據前面的說法：

最大的數只能減少，所以我們將移動的方式分為 3 種：

1.次大的數與最大的數相遇： B 增加、 A 減少，同時 C 減少，當 B 與 A 相遇時必定大於 C ，則 A 下降、 B 上升，一定會相遇，相遇後 A 和 B 再一起減少、 C 增加，三者便可相遇。（如圖 4）

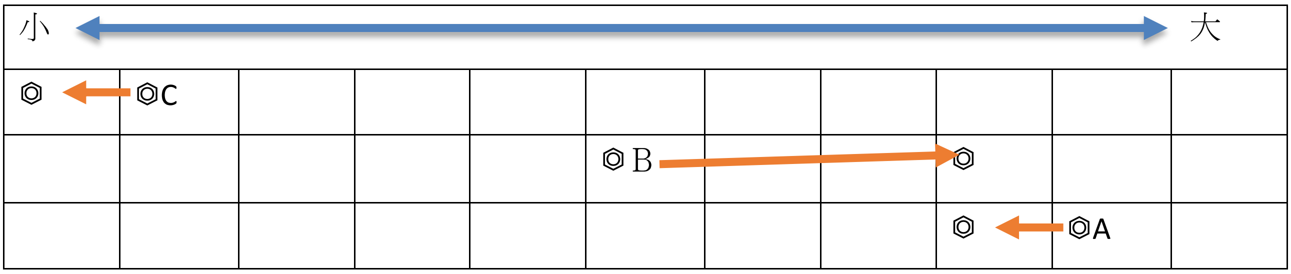

圖 4

2.最小的數與最大的數相遇： C 增加、 A 減少，同時 B 減少，當 C 要與 A 相遇前必定會與 B 相遇，而且必定小於 A ，此時 C 再繼續增加即可與 A 相遇（由於 B 和 C 相遇了，可將 B 和 C 視為相同的數，若 C 要與 A 相遇，則 B 和 C 勢必又要分開，因此結果與移動方式 1 相同，只是多了一些移動過程），相遇後 A 和 C 再一起減少、 B 增加，三者便可相遇。（如圖 5）

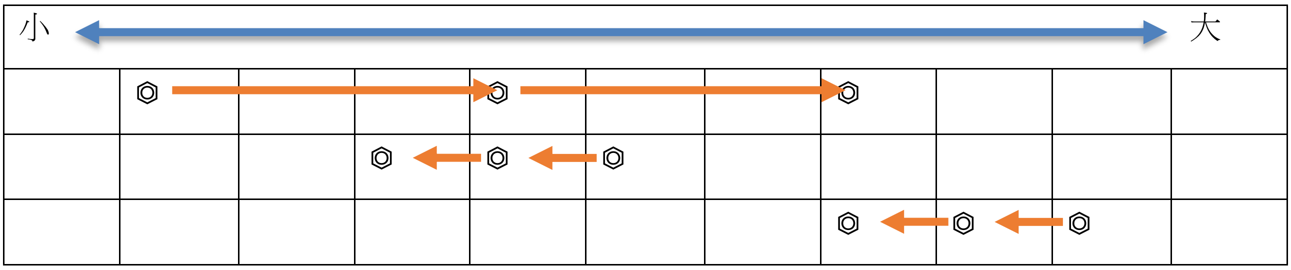

圖 5

3.最小的數與次大的數相遇: C 增加、 B 減少，同時 A 減少，當 C 與 B 相遇時必定小於 A ，此時 C 和 B 只能有一數增加、一數減少，無法同時增加，因此必須選擇其中一數增加並與 A 相遇，接著再由最小的一數增加並與兩個相同的大數相遇(結果同移動方式 1)，三者便可相遇。（如圖 6）

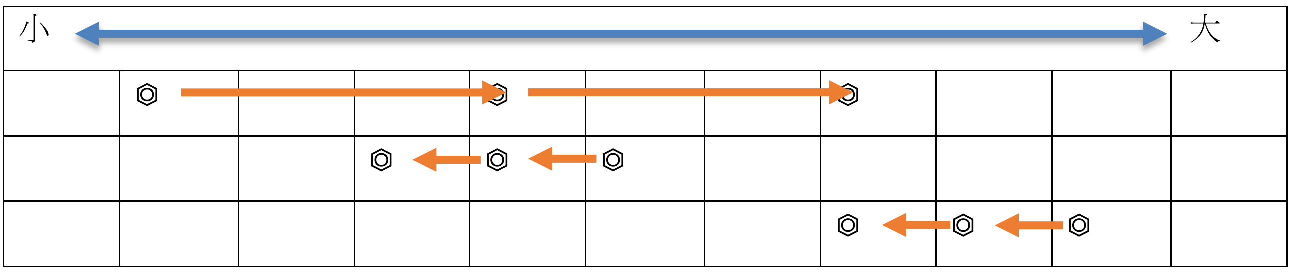

圖 6

綜合上述 1~3 可知三數字若想要變成相同數字的移動方式為：由三數中次大的數和最大的數相遇，再由最小的數和前述數字相遇就可以變成三個相同的數字。

而當三數中的最大數與次大數相遇時即表示兩者的數字一樣，三個位置的數字就變成只有兩種數字，此時我們可以將這個情況轉化為三數中的兩數移動方式，因此就可以變成同一顏色。

結論：結合（一）移動量、（二）移動方式的結論我們可知在四數的情況下，只要三個數的兩兩差是 4 的倍數，並先以三數中次大的數和最大的數相遇，再和最小的數相遇就可以得到相同的三數，此三數便可以完全變成第四數。

回顧：了解了以上性質，我們回過頭來看原本的問題，要讓四色變色龍變成同一種顏色，只要四色的變色龍數量中有三色數量之間兩兩差為 4 的倍數，則最後必可變成同一顏色。

三、五色的變色龍要怎麼解？

我們之前發現三數只要兩個數是 3 的倍數就可解，四數只要三個數兩兩是 4 的倍數就可解，於是我們將相同的規則推廣到五色，得出新的問題如下。

問題：五色的變色龍是否能變成同一種顏色？（條件：只有在 4 個完全不同顏色的變色龍各一隻湊在一起時, 才會同時變成第 5 種顏色的變色龍。）

操作：首先我們設定一組可以滿足完成變色條件的 5 數(1、7、11、16、21)並將變色的過程紀錄（如表十）：

表十

初始數值	變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程		變色過程	
1	**+4**	**5**	**-1**	**4**	**-1**	**3**	**-1**	**2**	**+8**	**10**	**-1**	**9**	**+4**	**13**	**-13**	**0**
7	**-1**	**6**	**-1**	**5**	**-1**	**4**	**-1**	**3**	**-2**	**1**	**+4**	**5**	**-1**	**4**	**+52**	**56**
11	**-1**	**10**	**+4**	**14**	**-1**	**13**	**+4**	**17**	**-2**	**15**	**-1**	**14**	**-1**	**13**	**-13**	**0**
16	**-1**	**15**	**-1**	**14**	**+4**	**18**	**-1**	**17**	**-2**	**15**	**-1**	**14**	**-1**	**13**	**-13**	**0**
21	**-1**	**20**	**-1**	**19**	**-1**	**18**	**-1**	**17**	**-2**	**15**	**-1**	**14**	**-1**	**13**	**-13**	**0**

猜想：結果顯示確實可以完成，因此我們猜想五色可以成功變色的條件只要有 4 個數相差 5 的倍數就可以成功變色。

證明：我們將五色變色龍的數量設為正整數 N_1、N_2、N_3、N_4、N_5，並由左而右依序排列為 N_1、N_2、N_3、N_4、N_5，且 $0 \leqq N_1<N_2<N_3<N_4<N_5$，$N_1$、$N_2$、$N_3$、$N_4$、$N_5 \in \mathbb{N} \cup 0$，可得四種基本動作 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5（如表十一）

表十一

不同位置移動量 / 動作	N_1的移動量	N_2的移動量	N_3的移動量	N_4的移動量	N_5的移動量
M_1	+4	−1	−1	−1	−1
M_2	−1	+4	−1	−1	−1
M_3	−1	−1	+4	−1	−1
M_4	−1	−1	−1	+4	−1
M_5	−1	−1	−1	−1	+4

透過基本動作的重複運作可知

a_1M_1＝（$+4a_1$、$-a_1$、$-a_1$、$-a_1$、$-a_1$）（表示進行 a_1 次的 M_1 動作）

a_2M_2＝（$-a_2$、$+4a_2$、$-a_2$、$-a_2$、$-a_2$）（表示進行 a_2 次的 M_2 動作）

a_3M_3＝（$-a_3$、$-a_3$、$+4a_3$、$-a_3$、$-a_3$）（表示進行 a_3 次的 M_3 動作）

a_4M_4＝（$-a_4$、$-a_4$、$-a_4$、$+4a_4$、$-a_4$）（表示進行 a_4 次的 M_4 動作）

a_5M_5＝（$-a_5$、$-a_5$、$-a_5$、$-a_5$、$+4a_5$）（表示進行 a_5 次的 M_5 動作）

並將五種基本動作混合使用得到

$a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3+a_4M_4+a_5M_5$

＝（$+4a_1-a_2-a_3-a_4-a_5$、$-a_1+4a_2-a_3-a_4-a_5$、$-a_1-a_2+4a_3-a_4-a_5$、$-a_1-a_2-a_3+4a_4-a_5$、$-a_1-a_2-a_3-a_4+4a_5$）

因此五數（N_1、N_2、N_3、N_4、N_5）經過 a_1 次的 M_1 動作、a_2 次的 M_2 動作、a_3 次的 M_3 動作、a_4 次的 M_4 動作、a_5 次的 M_5 動作後可以得到五個位置的最終數值為

（$N_1+4a_1-a_2-a_3-a_4-a_5$、$N_2-a_1+4a_2-a_3-a_4-a_5$、$N_3-a_1-a_2+4a_3-a_4-a_5$、$N_4-a_1-a_2-a_3+4a_4-a_5$、$N_5-a_1-a_2-a_3-a_4+4a_5$）。（如表十二）

表十二

不同位置移動量 動作	N_1的移動量	N_2的移動量	N_3的移動量	N_4的移動量	N_5的移動量
a_1M_1	$+4a_1$	$-a_1$	$-a_1$	$-a_1$	$-a_1$
a_2M_2	$-a_2$	$+4a_2$	$-a_2$	$-a_2$	$-a_2$
a_3M_3	$-a_3$	$-a_3$	$+4a_3$	$-a_3$	$-a_3$
a_4M_4	$-a_4$	$-a_4$	$-a_4$	$+4a_4$	$-a_4$
a_5M_5	$-a_5$	$-a_5$	$-a_5$	$-a_5$	$+4a_5$
$a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3+a_4M_4+a_5M_5$	$+4a_1-a_2-a_3-a_4-a_5$	$-a_1+4a_2-a_3-a_4-a_5$	$-a_1-a_2+4a_3-a_4-a_5$	$-a_1-a_2-a_3+4a_4-a_5$	$-a_1-a_2-a_3-a_4+4a_5$

接下來我們將移動的情形分為移動量和移動方式

（一）移動量

我們將五數之間任兩個位置的移動量分成 10 種情況:

1. N_2-N_1的移動量$=5(a_2-a_1)$
2. N_3-N_1的移動量$=5(a_3-a_1)$
3. N_4-N_1的移動量$=5(a_4-a_1)$
4. N_5-N_1的移動量$=5(a_5-a_1)$
5. N_3-N_2的移動量$=5(a_3-a_2)$
6. N_4-N_2的移動量$=5(a_4-a_2)$
7. N_5-N_2的移動量$=5(a_5-a_2)$
8. N_4-N_3的移動量$=5(a_4-a_3)$
9. N_5-N_3的移動量$=5(a_5-a_3)$
10. N_5-N_4的移動量$=5(a_5-a_4)$

（二）移動方式

根據四色時的三數移動方式推論：當三數中的最大數與次大數相遇時即表示兩者的數字一樣，三個位置的數字就變成只有兩種數字，因此我們可以將這個情況轉化為三數中的兩數移動方式，就可以變成同一顏色。

而在五色中的四數移動方式中也只要先讓最大數和次大數相遇，則可以轉化為四色時的三數移動方式，同樣地，再讓最大數與次大數相遇則又可以轉化為三數中的兩數移動方式，即可變色成功。

結論：綜合 1～6 的結果可知任兩數移動量的差皆為 5 的倍數，則表示此兩數的差必為 5 的倍數才可以形成相同的數，即該組變色龍最終可變成同一顏色。

四、n 色的變色龍要怎麼解？

有了前面的探討，我們直接將問題推廣至 n 色變色龍

問題：n 色的變色龍是否能變成同一種顏色？（條件：只有在 n-1 個完全不同顏色的變色龍各一隻湊在一起時, 才會同時變成第 n 種顏色的變色龍。）

猜想：我們猜想 n 色可以成功變色的條件只要有 n -1 個數相差 n 的倍數就可以成功變色。

證明：我們將 n 色變色龍的數量設為正整數 N_1、N_2、N_3、…、N_n，並由左而右依序排列為 N_1、N_2、N_3、…、N_n，且 $0 \leqq N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_n$，$N_1$、$N_2$、$N_3$、…、$N_n \in \mathbb{N} \cup 0$

可得 n 種基本動作 M_1、M_2、M_3、…、M_n（如表十三）

表十三

不同位置移動量 / 動作	N_1的移動量	N_2的移動量	N_3的移動量	N_4的移動量	…	N_n的移動量
M_1	$+(n-1)$	-1	-1	-1	…	-1
M_2	-1	$+(n-1)$	-1	-1	…	-1
M_3	-1	-1	$+(n-1)$	-1	…	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
M_n	-1	-1	-1	-1	…	$+(n-1)$

透過基本動作的重複運作可知

$a_1M_1=[+(n-1)a_1、-a_1、-a_1、\cdots、-a_1]$（表示進行 a_1 次的 M_1 動作）

$a_2M_2=[-a_2、+(n-1)a_2、-a_2、\cdots、-a_2]$（表示進行 a_2 次的 M_2 動作）

$a_3M_3=[-a_3、-a_3、+(n-1)a_3、\cdots、-a_3]$（表示進行 a_3 次的 M_3 動作）

…

$a_nM_n=[-a_n、-a_n、-a_n、\cdots、+(n-1)a_n]$（表示進行 a_n 次的 M_n 動作）

並將 n 種基本動作混合使用得到

$a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3+\cdots+a_nM_n=$

$[(n-1)a_1-a_2-a_3-\cdots-a_n、-a_1+(n-1)a_2-a_3-\cdots-a_n、-a_1-a_2+(n-1)a_3-\cdots-a_n、\cdots、-a_1-a_2-a_3-\cdots+(n-1)a_n]$

因此 n 數（N_1、N_2、N_3、⋯、N_n）經過 a_1 次的 M_1 動作、a_2 次的 M_2 動作、a_3 次的 M_3 動作、⋯、a_n 次的 M_n 動作後可以得到 n 個位置的最終數值為

$[N_1+(n-1)a_1-a_2-a_3-\cdots-a_n$、$N_2-a_1+(n-1)a_2-a_3-\cdots-a_n$、$N_3-a_1-a_2+(n-1)a_3-\cdots-a_n$、⋯、$N_n-a_1-a_2-a_3-\cdots+(n-1)a_4]$。（如表十四）

表十四

不同位置移動量 動作	N_1 的移動量	N_2 的移動量	N_3 的移動量	⋯	N_n 的移動量
a_1M_1	$+(n-1)a_1$	$-a_1$	$-a_1$	…	$-a_1$
a_2M_2	$-a_2$	$+(n-1)a_2$	$-a_2$	…	$-a_2$
a_3M_3	$-a_3$	$-a_3$	$+(n-1)a_3$	…	$-a_3$
…	…	…	…	…	…
a_nM_n	$-a_n$	$-a_n$	$-a_n$	…	$+(n-1)a_n$
$a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3+\ldots+a_nM_n$	$+(n-1)a_1-a_2-a_3-\ldots-a_n$	$-a_1+(n-1)a_2-a_3-\cdots-a_n$	$-a_1-a_2+(n-1)a_3-\cdots-a_n$	…	$-a_1-a_2-a_3-\cdots+(n-1)a_n$

（一）移動量

我們將 n 數之間任兩個位置的移動量分成 $\frac{n(n-1)}{2}$ 種情況；分別是：

N_2 的移動量－ N_1 的移動量 $=n(a_2-a_1)$

N_3 的移動量－ N_1 的移動量 $=n(a_3-a_1)$

…

N_n 的移動量－ N_1 的移動量 $=n(a_n-a_1)$

N_3 的移動量－ N_2 的移動量 $=n(a_3-a_2)$

…

N_n 的移動量－ N_2 的移動量 $=n(a_n-a_2)$

以此類推可得

N_n 的移動量－N_{n-1} 的移動量 $=n(a_n-a_{n-1})$

綜合以上的結果可知任兩數移動量的差皆為 n 的倍數，因此表示此兩數的差必為 n 的倍數才可以形成相同的數。

（二）移動方式

n 數中的 n-1 個數字（兩兩差是 n 的倍數）要如何變成相同數字：

根據將五色中的四數移動方式轉化為四色時的三數移動方式，可以知道 n 數中的 n-1 個數字（兩兩差是 n 的倍數）只要以相同的轉化過程，就可以依序轉化為 n-1 數中的 n-2 個數字、n-2 數中的 n-3 個數字、…、3 數中的 2 個數字，最終即可變成同一顏色。

結論：結合（一）移動量、（二）移動方式的結論我們可知在 n 數的情況下，只要 n-1 個數的兩兩差是 n 的倍數，並先以 n-1 個數中（兩兩差是 n 的倍數）次大的數和最大的數相遇，再和較小的數相遇就可以得到相同的三數，依序將 n-1 種數轉化為相同的數，此 n 色變色龍便可以完全變成同一顏色。

陸、研究結果

一、在三種顏色的情況下：

1.只要有任兩種顏色的變色龍其差為 3 的倍數，即該組變色龍最終可變成同一顏色。

2.若是有解，則最後所有變色龍的顏色一定會是那個沒有和其他顏色數量差為 3 的倍數的變色龍上。

3.在有解的情況下時，先找出數量差為 3 的倍數的那兩個數中較小的那一個，然後不斷讓其餘兩色的變色龍互相碰撞，直到有兩種顏色的變色龍的數量相等，接下來再讓那相同數量的兩色的變色龍不斷碰撞，即可讓所有的變色龍變成同一種顏色。

二、四種顏色的情況：

1.只要有任三種顏色的變色龍其任兩數的差皆為 4 的倍數，即該組變色龍最終可變成同一顏色。

2.若是有解，則最後，所有變色龍的顏色一定會是那個沒有和其他顏色數量差為 4 的倍數的變色龍上。

三、五種顏色的情況：

只要有任四種顏色的變色龍其任兩數的差皆為 5 的倍數，即該組變色龍最終可變成同一顏色。

四、n 種顏色的情況：

只要 n-1 種顏色的變色龍其任兩數的差皆為 n 的倍數，即該組變色龍最終可變成同一顏色。

柒、討論

此次研究我們從如何讓三色的變色龍變成同一種顏色出發，接著探討如何讓四色、五色的變色龍變成同一種顏色，最後推論到如何讓 n 色的變色龍變成同一種顏色？

研究過程中，我們一開始依照規則毫無頭緒的嘗試，後來發現給定的三數中有兩數相差結果是 3 的倍數，於是我們猜想會不會三數中只要有兩數差是 3 的倍數，最後變色龍定可變成同一顏色。我們找了許多組滿足此條件的情況測試，最後都可以成功，因此我們利用移動量和移動方式驗正了我們的想法是正確的。延續這個原則，我們最後推論出 n 色的變色龍，只要有 n-1 個數的兩兩差是 n 的倍數，變色龍便可以完全變成同一顏色。

捌、結論

一、當有三種顏色的變色龍時，只要有任兩種顏色的變色龍的數量差為 3 的倍數，便一定有解。

二、當有四種顏色的變色龍時，只要有任三種顏色的變色龍的數量差為 4 的倍數，便一定有解。

三、當有五種顏色的變色龍時，只要有任四種顏色的變色龍的數量差為 5 的倍數，便一定有解。

四、當有 n 種顏色的變色龍時， 只要有任 n-1 種顏色的變色龍的數量差為 n 的倍數，便一定有解。

五、如果我們把變色龍的數量畫在數線上，當我們讓數量最少的變色龍數量+n-1，其餘 n-1 種變色龍數量-1 時，其實就會使得數量最少的變色龍，與其它種變色龍的**相對距離**拉近 n。

玖、未來展望

一、我們可以設定變色龍的數量會改變，例如:每三次變色變色龍會依比例增加總數 15%，每五次變色變色龍會依比例減少總數 20%，其餘規則一樣。

二、我們以後可以改變變色規則，例如:15，25 各扣 1，60 扣 4，最後就會變成 60 加 2，15、25 各扣 2(扣的數加起來為三的倍數才能執行此步驟)。因 60 扣的數最多，所以要加；15 和 25 扣得比較少，所以要減；而且扣的數加起來為 6，三數平均得 2，所以 60+2，15、25 扣 2。

三、我們也可以改變其他變色規則，例如將 15，25 各扣 1，60 扣 2，然後 60 不變(60-2+2)，15 和 25 各扣 1(會改變總數)。因 60 扣的數比較多，所以 15、25 扣的數會加到 60 這個數，所以 60 不變，15 和 25 各扣 1。

四、我們是以三色舉例，但也可以使用在四色或五色中。

拾、心得

作者 1：這次科展帶給我最大的收穫就是時間的重要性，因為我時常忘記時間，常常遲到；有時常常顧著玩，直到最後才想到要做什麼該做的事情。但在做了這個科展後，我了解了時間管理的重要性，因為我們在做科展的時候常常要珍惜時間，因為做科展的研究需要花相當長的時間來做科展，所以利用時間是非常重要的一件事。

作者 2：我覺得這個科展作品對我獲益良多，讓我改掉了粗心的習慣，以前我常數字會寫錯，但自從我做科展後，更常寫數字、研究數字，所以錯字就變少了，改掉了以前的壞習慣，也讓我知道時間的重要性，珍惜時間，不會把時間花在沒有意義事情上。

作者 3：這次是我第一次做科展，在此之前我幾乎沒有做科展的經驗，這次的科展讓我知道了做科展到底有多花時間，也十分感謝老師們的付出、同學們的努力，讓我們的科展得以完成。

拾壹、參考資料

1.森棚教官的數學題-變色龍

https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?cat=6842&a=6829&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=15503

2.國中數學課本第一冊，負數(數線).康軒文教