

金門地區第 56 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：**賓賓有理**

關 鍵 詞：賓果、統計、機率

編 號：

賓賓有理

作品摘要

從小學就開始受學生們喜愛的賓果遊戲，是同學間互相同樂的一項趣味活動，經由今年過年引發了這次研究，並探討在進行了共數百次的統計數據後，學習到了統計跟機率與期望值的一些知識與經驗。

目錄

壹、研究動機-----	3
貳、研究目的-----	3
參、研究器材與設備-----	3
肆、研究方法與討論-----	3
伍、結論-----	9
陸、參考資料-----	9

壹、研究動機

今年親戚們都回來一起過年，年節將至，各種彩卷也紛紛加碼吸引買氣。而家裡大人也買了賓果卡回來給我與表兄弟們一起同樂，享受這中獎對獎的氣氛，但玩來玩去總是沒辦法第一個達成賓果。開學後，我向老師提出了問題，希望能從中學習一些有關機率與統計方面的知識，於是便與同學們一起進行了這次的研究。

貳、研究目的

- 一、統計 5×5 盤面賓果連線的機率。
- 二、改變部分規則看是否影響賓果的機率。
- 三、計算出賓果中獎的期望值。
- 四、藉由這次的研究學習，瞭解機率與統計的知識，並培養觀察、分析的能力。

參、研究器材與設備

電腦、紙、筆

肆、研究方法與討論

問題一、統計 5×5 盤面賓果連線的機率

1.規則：在紙上畫出 5×5 格的方格，再分別填入 1~25 的數字，並以亂數產生器跑數字，將出現的數字劃掉，直到連成一條線即完成賓果，並記錄在第幾個數字時達成。

2.討論：同一組盤面 100 組亂數表和 100 組盤面同一組亂數表是否會影響賓果的機率？

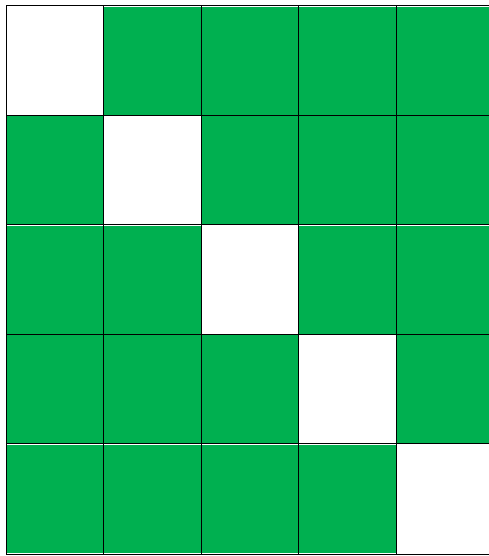
3.統計結果：

同一組盤面 100 組亂數		同一組亂數 100 組盤面	
第 5 個數字就賓果		第 5 個數字就賓果	
6	1	6	0
7	0	7	0
8	1	8	0
9	2	8	1
10	1	9	1
11	4	10	4
12	6	11	8
13	8	12	7
14	11	13	13
15	12	14	13
16	15	15	16
17	17	16	16
18	13	17	14
19	6	18	6
20	2	19	1
21	1	20	0
22	0	21	0
23	0	22	0
24	0	23	0
25	0	24	0
	0	25	0

4.發現：由上表所知，兩種情況比較多的賓果次數都是在第 15 至 16 次，所以推斷出因為盤面跟亂數都是隨機的，所以並不會影響賓果的機率。

5.延伸討論(1)：

而從上表中，也發現通常在 21 次之前就達成賓果，於是我們便開始找出要在 5×5 的盤面連成一條線最多需要幾個數字，並得到下列的結果。



在選取了 20 個數字之後，尚未選取的數字不在同一行或同一列時，即不可能連成一條線，所以至多需要選取 21 個數字 才有可能賓果。

綠色方格■：已被選取的部分
 白色方格□：未被選取的部分

6.延伸討論(2)：

在第一個表中，有一次只選了 5 個數字就已經賓果，那是否機率就真的是百分之一？

在進行這研究之前，我們尚未學到機率的算法，便去請教老師，從簡單的六面骰例子知道**機率=事件數÷總樣本數**

因為前 5 個數字的順序並不影響賓果的結果，所以我們利用了排列組合的 C(25,5)來計算總樣本數，共為 53130 種組合。

而賓果的情況共有直排、橫排、斜線共 12 種，所以前五個數字就賓果的機率為 $12 \div 53130=0.0002258611$

$0.0002258611 \times 100\% = 0.02258611\%$ （即為一萬次才有可能中兩次的機率）

問題二、如果改變部分規則，則賓果的機率會有甚麼變化？

在網路上搜尋賓果卡時，有看到中間那格是寫著“FREE” 的圖案卡片，也就是一開始中間的那一格便等於是已經選取，當數字仍是 1 到 25，在這種規則之下，賓果的機率又會是如何呢？

1.規則：正中間的格子為開始前即被選取，途中如出現已被選取的數字則不劃記但仍計算次數，其餘規則如問題一，共記錄一百次。



網路上看到的賓果卡

2.統計結果：

中間的格子為 FREE	
第 4 個數字就賓果	0
5	0
6	0
7	1
8	2
9	3
10	5
11	10
12	13
13	12
14	16
15	14
16	9
17	8
18	4
19	2
20	1
21	0

3.發現：從這表格發現，原本賓果最多的次數從第 15 至 16 次變成第 12 到 15 次，表示中間先選取一格的情形，是有增加賓果的機會。之所以會有這種規則，因為正中間所能連成的線共有四條，是為了讓大家覺得賓果機率提高而想去玩，但通常選取的數字範圍可能會更大，如上圖的賓果卡即是從 1 到 75，每一列以 15 個數字為一間隔，總樣本數約為 5.52×10^{26} ，即使中間為 FREE 格，中賓果的機率也是微乎其微。

問題三、賓果中獎的期望值

1.討論：以 1 到 25 的數字的盤面，只要持續開數字，一定能連成一條線完成賓果。如果進行有下注和獎金的賓果遊戲時，通常會限制開數字的次數，假設獎金是 N 倍的話，在甚麼情況下才算對玩家有利呢？

經過計算得到對雙方都公平的期望值為當中獎機率 = $1 / (N+1)$ 的情況，

$$(N) \times 1 / (N+1) + (-1) \times N / (N+1) = 0$$

假設獎金是 10 倍的話，以前面的統計數據來看，玩 100 次之中，前面 10 到 11 次就賓果的總和約佔全部的十分之一，所以估計如果開數字的次數為 11 次或更高的情況下即對玩家有利，反之則對莊家有利。

如果中間是 FREE 格的話，開數字的次數則也要相對減少對雙方才會公平。

2.延伸討論：遊戲參加人數，是否會影響自己中獎的機會？

因為人數方面較難操作，這邊剛好在網路上找到類似的賓果遊戲，中間有 FREE 格，總共開 10 個數字，第一個賓果獎金為 10 倍(同時賓果則都給 10 倍獎金)，且有分 5 人房，10 人房，20 人房，於是我們便分別進行了各 100 場的紀錄。



3.統計結果：

房間人數	賓果次數	其他人先 賓果	沒人中獎
5	10	43	47
10	8	61	31
20	6	71	23

(不同人數的加房間注上限不同但倍率一樣)

網路賓果遊戲遊玩的情形

4.發現：根據結果我們發現當參加人數越多的時候，自己所能中獎的機率也就越低。

在 5 人房時，統計出來的期望值為 0.1，10 人房則是變成-0.12，20 人房更是降為-0.34。

但因為有加注上限的關係，加上時間的因素，有些人會選擇上限高但人數較多的 20 人房。時間多可以慢慢玩的，便選擇人數較少的房間來提高自己賓果的機率。

問題四、數據檢討

1.討論：以上實際操作所統計出來的數據，其可信度高嗎？

因為在第一個問題中，在 100 次以內就出現了第 5 個數字就賓果的情況，讓我們心想，會不會是取得的數據太少，造成了不準確的結果。那出現比較多的次數，機率是否真的比較高呢？

由於我們沒辦法真的實際操作 10000 次或 100000 次，而且次數高的賓果機率情況又太過複雜難以計算，於是我們便請老師指導我們用程式模擬賓果的情形，來與我們自己統計的結果比較。

而在對問題一、問題二的規則下各進行 10000 次的模擬後，我們得到了以下的數據：

一般 5×5 盘面		中間的格子為 FREE	
第 5 次就賓果	1	第 4 次就賓果	1
6	16	5	18
7	38	6	36
8	72	7	78
9	167	8	166
10	284	9	258
11	470	10	435
12	677	11	673
13	1018	12	902
14	1286	13	1201
15	1453	14	1392
16	1587	15	1455
17	1380	16	1343
18	930	17	1067
19	494	18	658
20	109	19	258
21	10	20	55
		21	4

2.發現：

在 10000 次的賓果模擬中，我們發現規則一的盤面為第 15 到 16 次最多，規則二的盤面則是第 14 到第 15 次出現次數最多，說明中間格子為 FREE 確實會使盤面較易達成一連線，且與我們實際統計的結果相當接近，說明原先的數據在去掉極端值（100 次內第 5 個數就賓果的次數）的情況下，還是有一定的可信度。

接著我們又以程式模擬在問題三的規則下，10000 次中 1 個人進行賓果時中獎的次數，得到了在 10000 組數據中，能中獎的機率大約為十分之一，所以單人進行遊戲時，期望值算是公平的，但考慮到多人進行遊戲時，別人有可能比自己先中獎，所以相對來說，期望值算是對玩家稍微不利的。

伍、結論

- 一、 根據實際統計的結果，發現一般 5×5 盤面的賓果在第 15 到 16 個數字時達到連線的次數最多。且盤面跟亂數表的排列並不影響賓果的機率而最多需要 21 個數字才能確保必定能有一連線。
- 二、 而當中間為免費格的情況，連線最多的數字次數由第 15 到 16 個數，變為第 13 到 15 個數。比一般盤面較容易達成賓果。
- 三、 在有選取數字次數的限制和獎金為 N 倍的情況下，對莊家玩家都公平的期望值為 0，其中獎的機率為 $1 / (N+1)$ 。在高於此機率的次數限制對玩家有利，反之對莊家有利。而在多人遊戲下，即使期望值有可能為公平或有利的，但因為別人有可能會先中獎，所以對玩家而言期望值會降低。
- 四、 在經由程式模擬 10000 次各項的賓果情形，在出現最多次的次數上與實際操作統計的情形結果接近，表示有其可信度。但 100 次與總樣本數相比，仍屬不足。所以對於採樣數量較低的數據，可能得先將極端值去掉再來觀察會較準確。

陸、參考資料

(一)Horace C. Levinson (2004)·統計，你贏的機率·天下文化

(二)柯芷蓉等二人 (2011)·BINGO BINGO---賓果遊戲的幸與不幸·北市第 44 屆中小學科學展覽會，國中組，數學科。