

摘要

本次研究主題是『馬步』棋盤，是一個兩方輪留下棋，直到一方無法繼續下棋為止。由3×3、4×4與5×5的棋盤中歸納出最佳的移動模式。我們的研究方法是將馬步棋盤立體化，由立體化中的棋盤相對位置找到特殊點，並由特殊點找到必勝模式。

壹、研究動機

在去年的暑假期間，老師找了一些有關數學的遊戲給我們玩，我們看到其中一個叫做『馬步』。一開始我們不知道馬步是什麼意思，也不知道要怎麼玩。後來了解馬步就是象棋和西洋其中『馬』的步法，老師教我們第一步先下在一個位置，第二步下在第一步前後左右一格的斜角。不知不覺中越玩越有興趣，幾個禮拜後，老師建議我們把贏的方法寫出來，於是我們照著數學課本正在教的幾何圖形及立體圖形將這些棋盤製作出來，就開始了這次的科展。

貳、研究目的

- 一、製作出3×3、4×4、5×5立體模型，找出適合使用的結構。
- 二、由3×3、4×4立體模型，歸納出必勝規律。
- 三、由3×3、4×4、5×5平面棋盤，歸納出必勝規律。
- 四、由3×3×3立體模型及平面棋盤，歸納出必勝規律。

參、研究設備及器材

- 一、使用保麗龍球與竹籤製作出馬步立體模型。
- 二、使用棋盤紙進行對照及紀錄。
- 三、筆記本、筆、電腦、相機。

肆、研究過程或方法

一、馬步規則

- (一) 此為二人遊戲，是一個棋盤為 $n \times n$ 的正多邊形，雙方分為先手及後手，先手先下奇數，後手下偶數。
- (二) 依照『西洋棋騎士的步伐』依序寫上1、2、3…直到一方沒有空格可以走為止。

(三) 以下為5×5的部份棋局，先手已經沒有地方下9，所以為後手勝出。

2				4
		3		
	1		5	
		7		
8				6

(四) 如果雙方完全將棋盤下滿，而此時又輪到後手，依然判定為先手勝出。

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

二、製作馬步立體模型

(一) 我們根據每個馬步棋盤互相連結的格子將各個保麗龍球聯結在一起，試圖在這樣建構出來的立體模型中尋找必勝的規律。

(二) 其中我們發現雖然棋盤看起來非常對稱，但雙方的棋步中完全不會重疊，也就是說當先手下了第一步，即決定雙方各自的領地。我們認為這點相當的重要，在偶數格棋盤中雙方的陣地是相同的，但在奇數格棋盤中，第一步將決定某一方會多一格或少一格。於是我們在製作立體模型時將雙方領地的球各自上了色。

(三) 由於連結的路線非常多種，所以我們必須在這些種類之中挑選出適合討論必勝規律的方式。因此，我們並沒有辦法解釋所有的棋局，但至少希望能找到一些簡易的規律幫助先手及後手在遊戲中使用。

三、分析3×3馬步立體模型

(一) 模型就是八顆球組成一個八邊形，以及一個分開的球。

(二) 由於分開的球沒有任何聯結點，代表先手選擇這顆球必勝。

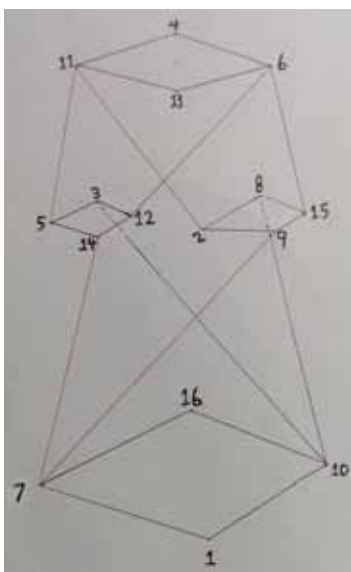
(三) 而八邊形是偶數，又不存在任何的叉路，所以當先手選擇八邊形中的任意一顆

球當作第一步時，必敗。

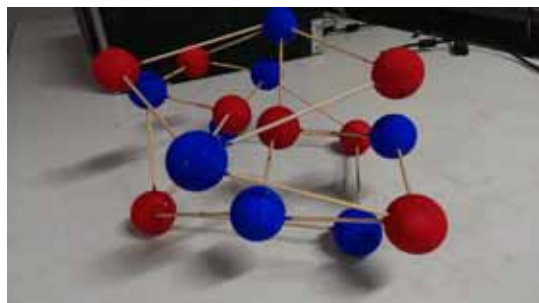
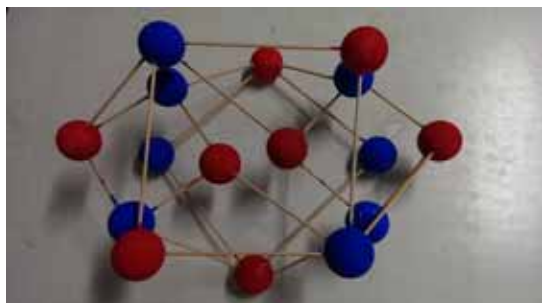
(四) 因此我們猜想在封閉的多邊形之中，只要是下到奇數的多邊形必勝，相反的下到偶數的多邊形必敗。

四、分析4×4馬步立體模型

(一) 比起3×3馬步立體模型果然變化許多，但我們不難將其中的連結化簡為以下的圖示。



(二) 我們發現在上層及下層都出現封閉的多邊形，所以至少有兩種規律可以決定這場期局。然而上層及下層的四邊形雖然各有兩條出路，但都由同一方所決定，所以我們認定這樣的多邊形仍為封閉的多邊形。



(三) 而在中層的兩個四邊形，因為都是偶數，所以我們斷定先下這個位置的人必敗或是必被迫離開這兩個四邊形，接下來就是前往上層及下層的先手，一樣必敗。而後下的人若沒有維持停留在這個多邊形中而轉進到下一個四邊形，則會遭遇

到一樣的下場，失敗。

(四) 因此我們得到四個四邊形，都是偶數，所以先手必敗。

五、分析3×3馬步平面棋盤

(一) 馬步棋盤是一個充滿對稱性的正方形，擁有 4 條對稱軸及 9 個棋盤格子。在經過旋轉及對稱，可以發現3×3棋盤中的第一步只有 3 種選擇，分別定為：A、B、C。

C	B	C
B	A	B
C	B	C

(二) 先手的第一步下在 A 點，即贏得比賽。因為後手沒有任何格子可以下棋。

(三) 先手的第一步下在 B 或 C 點，即讓後手贏得比賽。而且比賽過程中沒有任何叉路發生。是只有一種結局的賽局。

1	6	3
4		8
7	2	5

4	1	6
7		3
2	5	8

(四) 在3×3馬步棋盤中，先手擁有決定勝負的權利。

六、分析4×4馬步平面棋盤

(一) 馬步棋盤是一個充滿對稱性的正方形，擁有 4 條對稱軸及 16 個棋盤格子。在經過旋轉及對稱，可以發現4×4棋盤中的第一步只有 3 種選擇，分別定為：A、B、C。

C	B	B	C
B	A	A	B
B	A	A	B
C	B	B	C

(二) 先手下在 A 點，只要 4 步先手就會落敗。這對於先手來說是最糟糕的一手。

			2
	1		
		3	
4			

(三) 先手下在 B 點，又由於剛剛知道的下在 A 點必敗，於是雙方只能沿著棋盤外圍繞圈圈，直到先手進入到 A 區，然後落敗。

		3	6
4	7		
		5	2
8	1		

(四) 先手下在 C 點，此時後手下在 A 區就不會輸了。但可以藉由樹枝圖知道先手只能選擇繼續下 C 區然後被逼出來或是直接出來到 B 區，無論是哪一項都將造成先手的落敗。

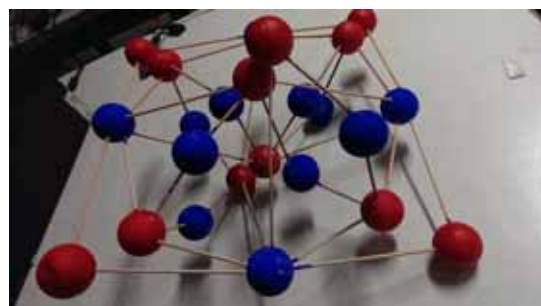
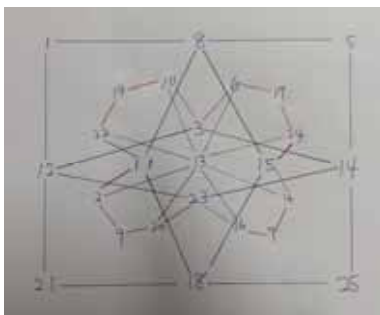
12	7		3
	4	9	6
8	11	2	
1		5	10

10	3		
		7	4
6	9	2	
1		5	8

(五) 因此在 4×4 馬步棋盤中，先手必敗。

七、分析 5×5 馬步平面棋盤

(一) 我們依然先製作出 5×5 的立體結構圖，然後嘗試製作出立體棋盤。



(二) 馬步棋盤是一個充滿對稱性的正方形，擁有 4 條對稱軸及 25 個棋盤格子。在經過旋轉及對稱，可以發現 5×5 棋盤中的第一步只有 6 種選擇，分別定為：A、B、C、D、E、F。

F	E	D	E	F
E	C	B	C	E
D	B	A	B	D
E	C	B	C	E
F	E	D	E	F

(三) 先手下在 B 點，只要 8 步先手就會落敗，是最糟糕的選擇。

2				4
		3		
	1		5	
		7		
8				6

(四) 先手下在 C、D 區，由(二)知道先下到 B 區的玩家會落敗，所以接下來先手與後手只能往外下在 C、D、E 區，期間會由後手走進 B 區或是最後先手走進 A 區，由先手得勝。

(五) 先手下在 E 區，則會跟先手下在 C、D 區的狀況恰恰先反，變成雙方繼續在 C、D、E 區遊走，最後會將先手逼入 B 區死胡同。由後手得勝。

(六) 先手下在 A 區，後手就只能選擇 E 區，最後當然由後手得勝。

		1		
			3	
	2			

3		1		
	2			

(七) 先手下在 F 區，這根本就是單人的遊戲。只要先手照著計畫走，後手只能一步步的邁向落敗。遊戲期間不會出現任何叉路，而且會將整個棋盤走完。是一個非常有趣的棋局。

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

(八) 因此在 5×5 馬步棋盤中，先手只有下在 C、D、F 區才能得勝，相反的先手下在 A、B、E 則會落敗。

八、分析 3×3×3 馬步平面棋盤

(一) 立體馬步棋盤較平面棋盤不同之處為：立體棋盤有三個面向可以走，比平面棋盤有了更多變化性，每一步都會有更多的選擇，因此只要玩家能避免『死路』，遊戲須花較長的時間會結束。

(二) 馬步棋盤是一個充滿對稱性的正方體，擁有 13 條對稱軸及 27 個棋盤格子。在經過旋轉及對稱，可以發現棋盤中的第一步有四種選擇 ABCD。(ABCD 的相對位置：A 為正方體棋盤的正中心。B 為正方體棋盤表面 6 個面的中心。C 為正方體棋盤的 8 個角。D 為正方體棋盤的 12 個邊)

的 B、C，或是所有的 D。佔領 B、C 地著優勢太大，無論先手後手，只要在非無路可走時避免走 B 點就必勝。

(七) 在遊戲剛開始，玩家每一步都有太多選擇，根據以下幾個原則走可使情況樂觀者及早勝利；落後者盡量挽回。

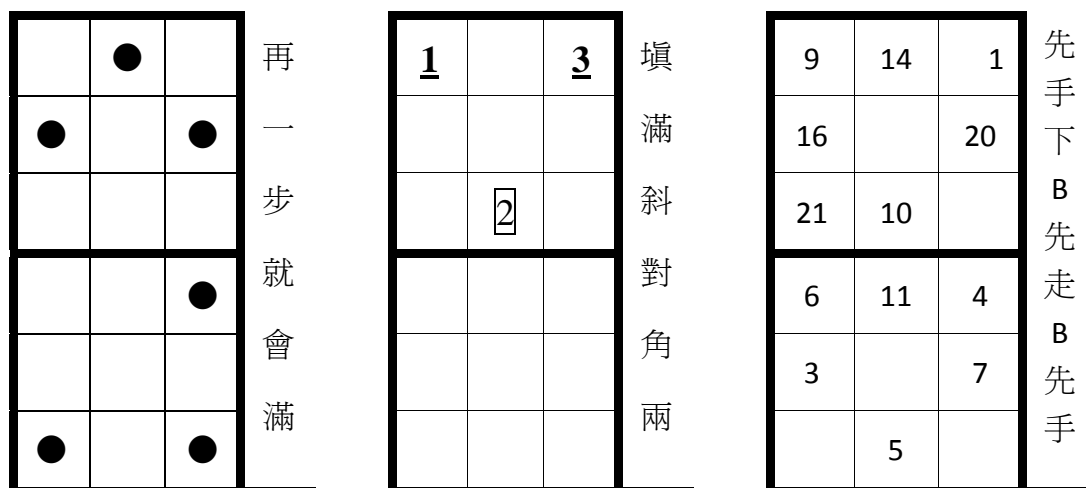
(八) 所以我們歸納出一個遊戲的規律，無論先手或後手，不能堵住自己的路。也就是說，佔據 B、C 者先避免走 B，再避免走重複步數的 C。佔據 D 者，先避免避免走到同一面的四個邊上，使對手斜對角兩個角填滿。也就是當一個邊上有兩個 C 時，下在兩個 C 共通的 D 即可。遊戲進行到第七步時，可選一位走到，而下一步被填滿最多者，在前敘條件下，避免走到該格，並引導對手走到該格的下一步。

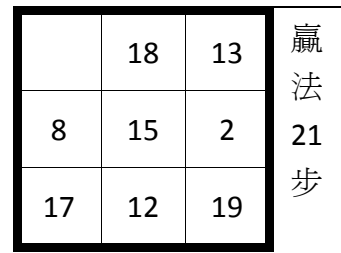
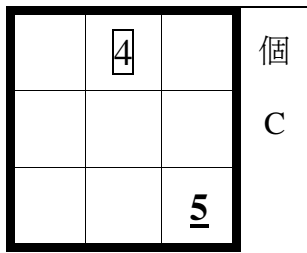
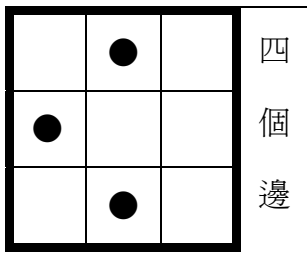
(九) 依照佔據 B、C 者的策略，有絕對勝利把握，不按照亦不敗。依照給佔據 D 者的策略，除非對手連連失誤，全無勝利把握。

(一〇) D 必輸的原因，先列出六個 B 的所有下一步：

B1	D9、D10、D11、D12	B4	D2、D5、D7、D10
B2	D4、D7、D8、D12	B5	D1、D5、D6、D9
B3	D3、D6、D8、D11	B6	D1、D2、D3、D4

(一一) 加上如圖狀況，我們瞭解 D 必輸的原因：D 下到第十步一定有一面的四個邊會滿。因此在佔 B、C 者玩家控制住局勢的情況下，遊戲進行到第 21 步前，佔 D 者玩家必輸。





伍、研究結果

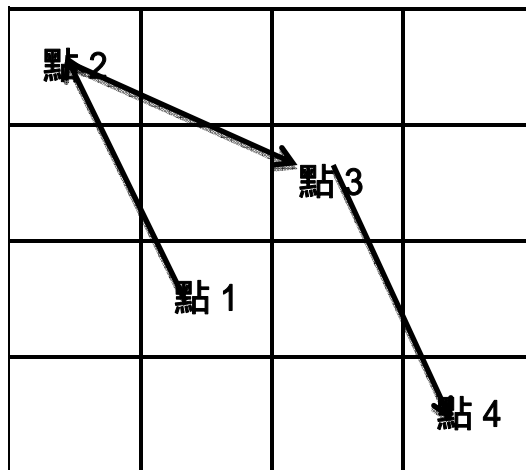
一、在立體模型中我們發現，掌控奇數及偶數多邊形的位置，就掌控了這場遊戲的勝敗。

(一) 在 3×3 的棋盤中只有一顆及八邊形，故先手下在一顆就得勝，先手下在八邊形就落敗。

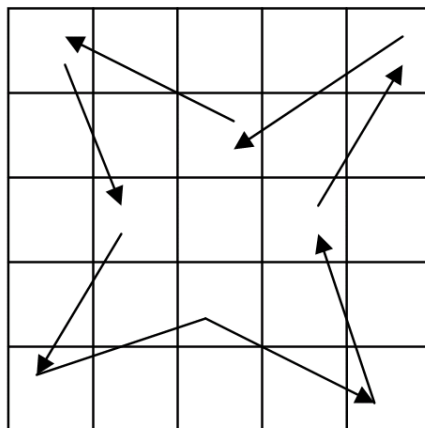
(二) 在 4×4 的棋盤中全部都是四邊形（偶數），故先手怎麼下都是落敗。

(三) 在平面棋盤中我們發現，掌控關鍵菱形的玩家就能得到勝利。

1. 4×4 的關鍵菱形



2. 5×5 的關鍵菱形



二、如果從先手第一手決定勝負的機率來看，我們可以簡單列出以下的表格：

	3×3 棋盤	4×4 棋盤	5×5 棋盤	3×3×3 棋盤
先手勝率	$\frac{1}{9} = 11.1\%$	$\frac{0}{16} = 0\%$	$\frac{12}{25} = 48\%$	$\frac{15}{27} = 56\%$
後手勝率	$\frac{8}{9} = 88.9\%$	$\frac{16}{16} = 100\%$	$\frac{13}{25} = 52\%$	$\frac{12}{27} = 44\%$

陸、討論

- 一、平面馬步一格最多有八個方向，所以當我們進行到6×6以上的棋盤時，要製作立體模型就相當的困難，尤其要在其中找到封閉的多邊形更是困難。
- 二、但因為我們在4×4、5×5棋盤中都有找到關鍵的菱形規律，所以我們猜測6×6以上的棋盤應該也存在某些菱形規律可以引導勝利。
- 三、因為立體的馬步有三個方向的走法，使得玩家每一步都有太多的選擇，於是我們就想到如果限制只有兩個面向的走法，是否就會有更單純的規律出現？

柒、結論

- 一、研究立體馬步，讓我們學習到多重思考模式。遊戲中，我們不斷地為自己規劃路線，也設法了解他人的走向。並了解到，在任何事情中，除了自己的立場，也要為他人設想，才是上策。
- 二、一開始我真的搞不懂，這個遊戲是要怎樣玩，又要怎樣做科展，知道以後也學到了很多的知識與經驗，雖然中途有一點無法繼續再做下去，因為一直去煩惱科展的事情。不過有老師的提醒先休息幾天，之後再去做科展，我們真的休息幾天再繼續做科展，反而變的更有精神才有辦法繼續努力。如果中途一旦放棄的話，這樣之前做的也就是等於白做，所以一開始選擇了它，也就是代表著你自己可以辦的到，只要有心去做。
- 三、希望未來能有機會研究2×3×3、2×4×4或2×n×n等其他數字的棋盤，或許會有更令人感到驚訝的結果。

捌、參考資料及其他

- 一、康軒文教事業。國中數學第四冊 2-2 垂直、平分與線對稱圖形 (P.63~P.79) 103.02。

二、康軒文教事業。國中數學第六冊 2-1 空間中的垂直與柱體 (P.68~P.85) 103.02。

三、馬步遊戲網頁，<http://www.1980-games.com/jeux-reflexion/autre-reflexion/007.php>