# 面積 n 等分之探討


## 摘要

本作品在於探討面積 n 等分問題，由三角形的面積 3 等分出發，研究三角形面積 n 等分，任意四邊形面積 n 等分，正 n 邊形面積 n 等分，扇形面積 n 等分，圓形面積 n 等分等問題。


## 壹、研究動機

當我們上到第五冊第三章，其中有一節談的是三角形的重心，其中有一例題「試證三角形的重心到三頂點分原三角形爲三個等積三角形」，因此就聯想到將簡單幾何圖形 n 等分的問題。

## 貳、研究目的

一、如何將任意三角形的面積 n 等分。
二、如何將任意四邊形的面積 n 等分。
三、如何將任意正 n 邊形的面積 n 等分。
四、如何將任意扇形的面積 n 等分。
五、如何將圓形的面積 n 等分。

## 參、研究設備及器材

直尺，圓規

## 肆、研究過程

我們兩位對數學很有興趣的同學開始探討此問題，我們反覆的思考、作圖，也搜尋網路中多邊形的重心位置找法，同時碰到有觀念欠清楚的地方就請教老師，我們下了一番功夫，總算略有一點收穫，但是也由於鑽研過程中，發現了許多目前我們也沒辦法解決的問題，這些問題我們會留著，往後會繼續的探討，尋求解決。

## 伍、研究結果

(一)三角形 n 等分：

a 作法：（如圖 1）

(1)將△ABC 的邊 $\overline{BC}$ n 等分，設其等分點依次爲 $D_1,D_2,\cdots\cdots,D_{n-2},D_{n-1}$

(2)作 $\overline{AD_1},\overline{AD_2},\cdots\cdots,\overline{AD_{n-1}}$，則△$ABD_1$,△$AD_1D_2$,△$AD_2D_3$,……,

△$AD_{n-1}C$ 即爲所求。

證明：　∵$\triangle ABD_1, \triangle AD_1D_2, \triangle AD_2D_3, \cdots\cdots, \triangle AD_{n-1}C$ 諸三角形其底相等且高相同

∴$\triangle ABD_1 = \triangle AD_1D_2 = \triangle AD_2D_3 = \cdots\cdots = \triangle AD_{n-1}C$

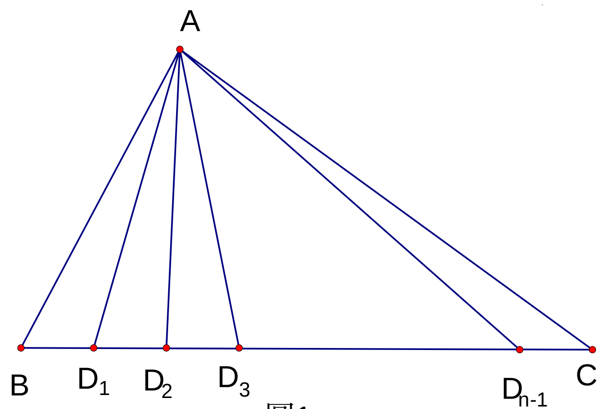

圖1

b 作法：（如圖 2）

(1)作$\triangle ABC$ 之中線 $\overline{AM}$

(2)將 $\overline{AM}$ n 等分，設其等分點依次為 $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_{n-1}$

(3)作 $\overline{BD_1}, \overline{CD_1}, \overline{BD_2}, \overline{CD_2}, \cdots\cdots, \overline{BD_{n-1}}, \overline{CD_{n-1}}$ ，則四邊形 $ABD_1C$,四邊形 $D_1BD_2C, \cdots\cdots$,四邊形 $D_{n-2}BD_{n-1}C$,$\triangle D_{n-1}BC$ 即為所求。

證明：　∵$\triangle ABD_1 = \triangle D_1BD_2 = \triangle D_2BD_3 = \cdots\cdots = \triangle D_{n-1}BM$(同底等高)

又∵$\triangle ACD_1 = \triangle D_1CD_2 = \triangle D_2CD_3 = \cdots\cdots = \triangle D_{n-1}CM$(同底等高)

∴四邊形 $ABD_1C$＝四邊形 $D_1BD_2C$＝四邊形 $D_2BD_3C = \cdots\cdots = \triangle D_{n-1}BC$

註：$\overline{AM}$ 不是中線也可以。

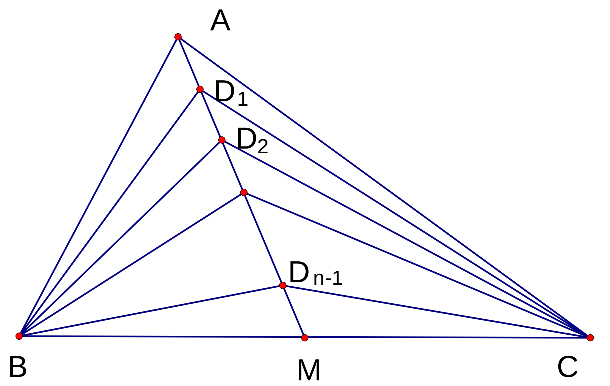

圖2

(二)四邊形 n 等分

(1)平行四邊形

( 設 n ＝ 6 )

a 作法：(如圖 3)

(1)在 $\overline{CD}$ 上取 E、F，使得 $\overline{CE}=\overline{EF}=\overline{FD}$

(2)在 $\overline{BC}$ 上取 G、H，使得 $\overline{BG}=\overline{GH}=\overline{HC}$

(3)作 $\overline{AG},\overline{AH},\overline{AC},\overline{AE},\overline{AF}$ ，則△ABG、△AGH、△AHC、△ACE、△AEF、△AFD 即為所求。

證明： ∵△ABG＝△AGH＝△AHC(同底等高)

又∵△ACE＝△AEF＝△AFD(同底等高)

而又△ABC＝△ACD

∴△ABG＝△AGH＝△AHC＝……＝△AFD

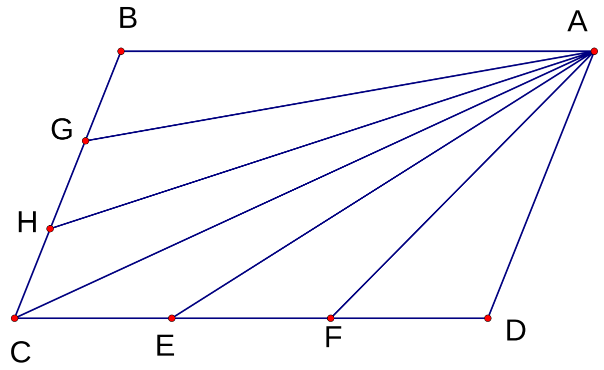


圖3

b 作法：(如圖 4)

(1)將 $\overline{AD}$ n 等分，設其等分點依次為 $M_1,M_2,\cdots\cdots,M_{n-1}$

(2)將 $\overline{BC}$ n 等分，設其等分點依次為 $N_1,N_2,\cdots\cdots,N_{n-1}$

(3)作 $\overline{M_1N_1},\overline{M_2N_2},\cdots\cdots,\overline{M_{n-1}N_{n-1}}$ ，則▱$ABN_1M_1$,▱$M_1N_1M_2N_2$,……▱$M_{n-1}N_{n-1}CD$ 即為所求。

證明： ∵▱$ABN_1M_1$≅▱$M_1N_1M_2N_2$≅……≅▱$M_{n-1}N_{n-1}CD$

∴▱$ABN_1M_1$＝▱$M_1N_1M_2N_2$＝……＝▱$M_{n-1}N_{n-1}CD$

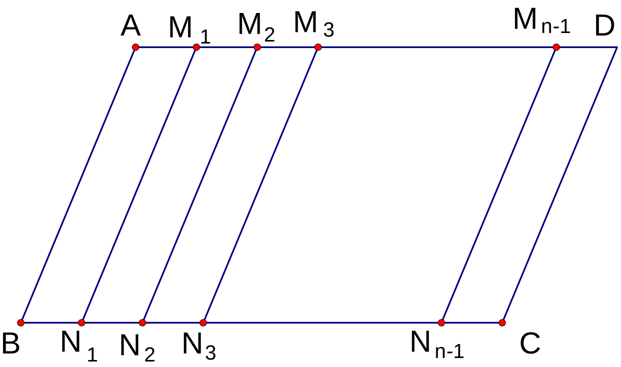


圖4

C、(如圖 5）

先將 n 分解或兩正整數之乘積： n ＝ k × l ＝……

作法：(1)將 $\overline{AD}$ k 等分，設其等分點依次為 $M_1,M_2,\cdots\cdots,M_{k-1}$

(2)將 $\overline{AB}$ l 等分，設其等分點依次為 $N_1,N_2,\cdots\cdots,N_{l-1}$

(3)分別過 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AB}$ 邊上之等分點作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 之平行線交出 k×l 個小平行四邊形即為所求。

證明： ∵k×l(＝n) 個小平行四邊形皆全等

∴k×l 個小平行四邊形之面積皆相等

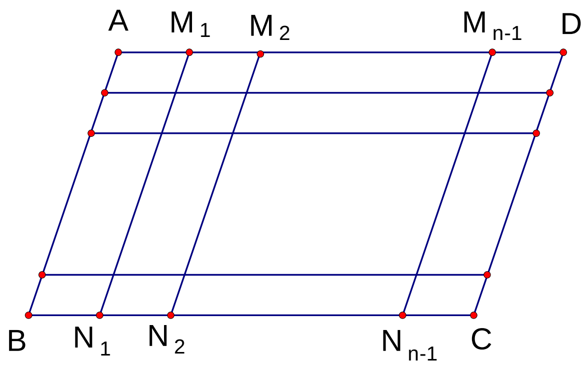


圖5

(2)任意四邊形

作法：(如圖 6)

(1)作四邊形 ABCD 之對角線 $\overline{AC}$

(2)將 $\overline{AC}$ n 等分，設其等分點依次為 $M_1,M_2,\cdots\cdots M_{n-1}$

(3)作 $\overline{BM_1},\overline{DM_1},\overline{BM_2},\overline{DM_2},\cdots\cdots,\overline{BM_{n-1}},\overline{DM_{n-1}}$，則四邊形 $ABM_1D$, 四邊形 $M_1BM_2D,\cdots\cdots,$四邊形 $M_{n-1}BCD$ 即為所求。

證明：∵$\triangle ABM_1=\triangle M_1BM_2=\cdots\cdots=\triangle M_{n-1}BC$(等底同高)

又∵$\triangle ADM_1=\triangle M_1DM_2=\cdots\cdots=\triangle M_{n-1}DC$(等底同高)

∴四邊形 $ABM_1D$＝四邊形 $M_1BM_2D$＝⋯⋯＝四邊形 $M_{n-1}BCD$

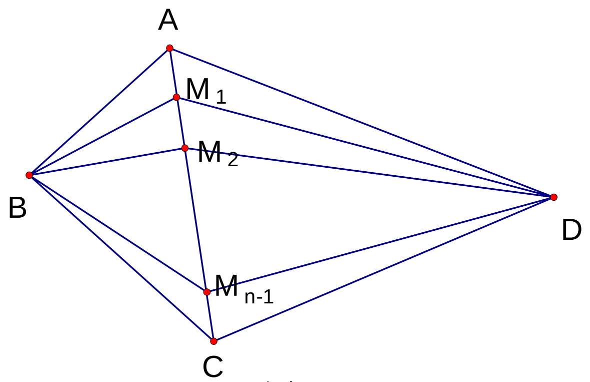

圖6

(三)正 n 邊形 n 等分

作法：(如圖 7)

(1)任作$\angle A_1$與$\angle A_2$之分角線，設相交於 O 點

(2)作 $\overline{OA_3},\overline{OA_4},\overline{OA_5},\cdots\cdots,\overline{OA_n}$，則$\triangle OA_1A_2,\triangle OA_2A_3,\cdots\cdots,\triangle OA_{n-1}A_n$即為所求。

證明：∵$\triangle OA_1A_2,\triangle OA_2A_3,\triangle OA_3A_4,\cdots\cdots,\triangle OA_{n-1}A_n$等 n 個△其中底與高都相等。

∴$\triangle OA_1A_2=\triangle OA_2A_3=\triangle OA_3A_4=\cdots\cdots=\triangle OA_{n-1}A_n$

註：O 點即是此正 n 邊形的內切圓與外接圓的圓心，也是正 n 邊形的重心。

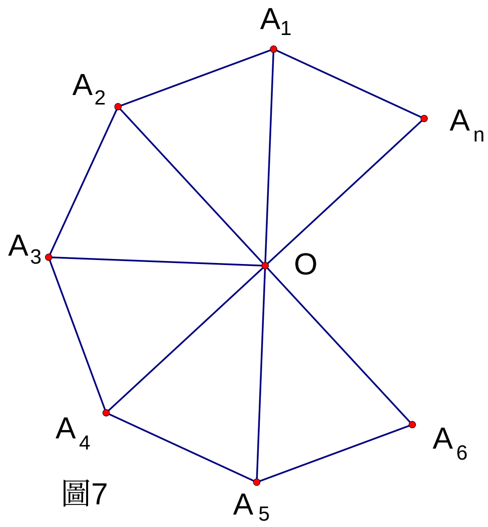

圖7

(四)扇形 n 等分

( 設 n ＝ 8 )

作法：( 如圖 8 )

(1)將 $\angle AOB$ 二等分為 $\angle AOC$ 與 $\angle BOC$

(2)再將 $\angle AOC$ 與 $\angle BOC$ 二等分，分別為 $\angle AOD$ 與 $\angle COD$ 、 $\angle COE$ 與 $\angle BOE$

(3)再將 $\angle AOD$ , $\angle COD$ , $\angle COE$ , $\angle BOE$ 二等分，則得扇形 AOM,扇形 MOD,……扇形 QOB 即為所求。

證明： ∵扇形 AOM,扇形 MOD,……,扇形 QOB，它們的邊都相等且夾角皆相等

∴扇形 AOM＝扇形 MOD＝……＝扇形 QOB

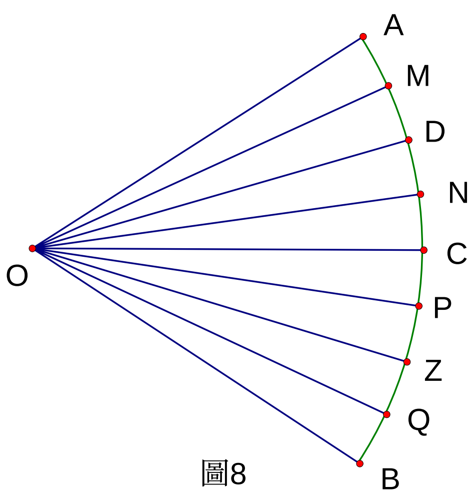

圖8

(五)圓形 n 等分

( 設 n ＝ 8 )

作法：( 如圖 9 )

(1)先找到圓的圓心設為 O

(2)過 O 作兩直徑 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

(3)作 $\angle COB$ 與 $\angle COM$ 之角平分線，設交圓 O 於 M、P 且包含其角平分線的直線另交圓 O 於 N、Q，則扇形 AON,扇形 NOD,……,扇形 POA 即為所求。

證明：∵扇形 AON,扇形 NOD,……,扇形 POA，它們的邊都相等且等於半徑，夾角皆相等為 $45^{\circ}$

∴扇形 AON＝扇形 NOD＝……＝扇形 POA

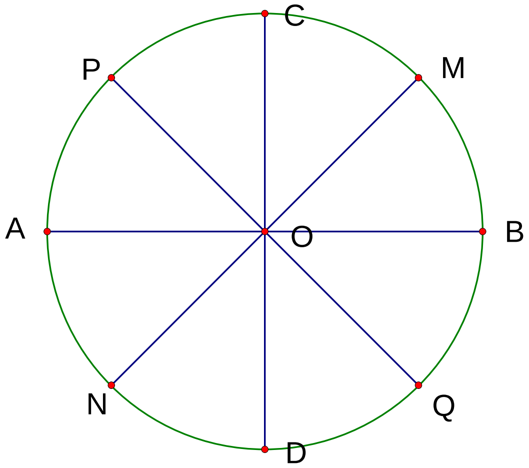


圖9

## 陸、討論

(1)在(二)平行四邊形作法 a 中，此種作法受到一點限制，就是其中 n 等分中的 n 需是偶數。

(2)在(二)平行四邊形作法 C 是一種很好的 n 等分法且其分法非唯一。在 n＝ k × l 中若 k＝1 或 l＝1，則與(二)(1)b 作法相同。

(3)在(二)(2)中任意四邊形 n 等分，這種作法非常好，亦適用於平行四邊形甚至凹四邊形，實在是一種不錯的方法。

(4)正 n 邊形 n 等分作法中，其中每一等分皆是三角形，亦可再仿三角形 k 等分的作法再細等分。

(5)有關扇形 n 等分的作法，由於工具限制只能用尺與規，因此無法爲所欲爲的將任一角 n 等分，如將一個角三等分就辦不到，除非是特別角，因此扇形 n 等分就受到很大的限制。

(6)有關圓形 n 等分作法中所受限制與扇形有些相同，因此不能隨心所欲將一圓任意等分。

(7)在(五)作法中只能將圓作 $2^k$ 等分，事實上將圓等分不只是種分法，只要 $\frac{360°}{a°}$ 是整數，其中 a°是指特別角的度數如 30°,45°,60°……等，皆可將圓作等分。

(8)有關非正 n 邊形重心的求法：( 設 n ＝ 4 )

作法：( 如圖 10 )

(1)作△ABC 與△ACD 之重心爲 $G_1,G_2$

(2)作△ABD 與△BCD 之重心爲 $G_3,G_4$

(3)作 $\overline{G_1G_2}$ 與 $\overline{G_3G_4}$ 設交於 G，則 G 即爲四邊形 ABCD 之重心。

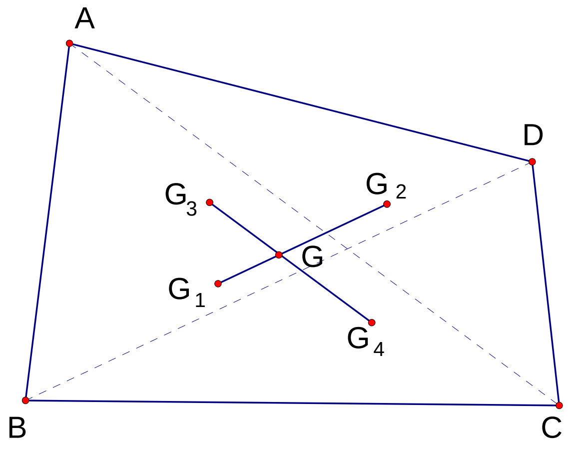


圖10

(9)有關重心之找法四(8)中之分法可推至更多邊之多邊形，此種方法是由網路搜尋而得來的。

(10)有關非正 n 邊形(其中 n≥4)的等分問題，我們雖然花了心血研究，很遺憾的沒得到結論。本以爲可仿照三角形的重心到三頂點分原△爲三個等積△來處理即可，也就是說只要能找到非正多邊形的重心然後與各頂點的連線即可將此多邊形 n 等分。事實上此種想法經過我們反覆思考、作圖、實驗、證明發現是錯誤的。

舉例說明如（圖 11）的鴛形 ABCD，我們很容易就可知道其重心一定在 $\overline{BD}$ 上而又要滿足與四頂點的連線要將此鴛形四等分，則此點必定要為 $\overline{BD}$ 之中點。而我們也可以直觀很肯定的說 $\overline{BD}$ 之中點絕不可能為鴛形之重心，因為重心絕對會較靠近 B 點處邊。

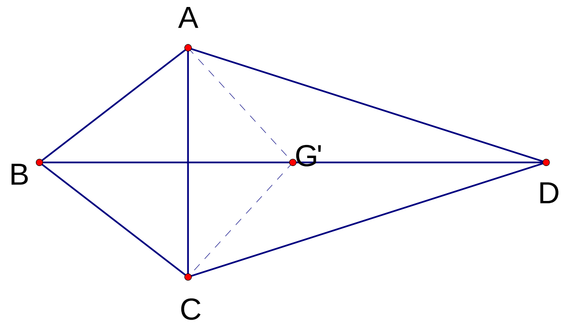


圖11

事實上此鴛形的重心在如(圖 12)中的 G 點即是與上面直觀的推斷吻合。

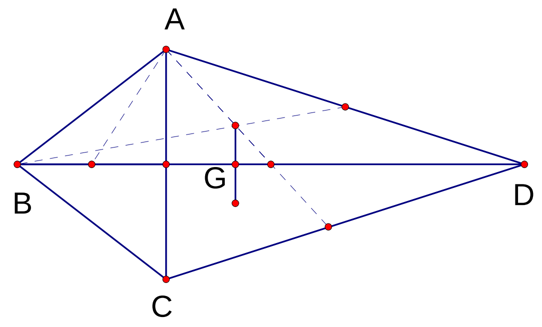


圖12

## 柒、參考資料


(一)康軒數學課本第五冊　　康軒出版社